Valós analízis gyakorlat, 2010. szeptember 27.

1. Vezessük le a test- és rendezési axiómákból, hogy $\forall a \in \mathbb{R}\ a^2 \geq 0$.

2. Mutassuk meg, hogy a komplex számok testét nem lehet rendezni úgy, hogy a rendezési axiómák teljesüljenek.

3. Cseréljük a rendezési axiómákat a következőkre.

10'. Minden valós szám vagy 0, vagy pozitív, vagy negatív.

11'. x akkor és csak akkor pozitív, ha $-x$ negatív.

12'. Bármely két pozitív szám összege pozitív.

13'. Bármely két pozitív szám szorzata pozitív.

A $<$ relációt definiáljuk a következőképppen: $a < b$ akkor és csak akkor, ha $b - a$ pozitív.

Mutasssuk meg, hogy ezekből következnek az eredeti rendezési axiómák.

4. Milyen rendezett testekben értelmezhetjük az egészrészfüggvényt?

5. Egy valós együtthatós, racionális tört függvényt (két polinom hányadosát) nevezzünk pozitívnak, ha a számláló és a nevező főegyütthatója azonos előjelű.

(a) Ellenőrizzük, hogy ezzel a rendezéssel a racionális tört függvények rendezett testet alkotnak.

(b) Teljesül-e a racionális törtek testében az Arkhimédészi axióma?

(c) Teljesül-e a racionális törtek testében a Cantor-axióma?

6. Legyen R rendezett test. Az R egy részhalmazát nevezzük „szépnek", ha $0 \in H$ és $\forall x \in H\ (x+1) \in H$. Legyen N az összes szép halmaz metszete.

(a) Miért értelmes ez a definíció?

(b) Igazoljuk, hogy N szép halmaz.

(c) Igazoljuk, hogy N minden nemüres részalmazának van legkisebb eleme.

7. Ismert, hogy ha n elég nagy pozitív egész, akkor n^3 és $(n+1)^3$ között mindig van prímszám. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan a pozitív valós szám, amire tetszőleges n pozitív egész esetén $\left[a^{3^n}\right]$ prím.

8. Tetszőleges x_1-re definiáljuk rekurzívan az $x_{n+1} = x_n\left(x_n + \frac{1}{n}\right)$ sorozatot. Igazoljuk, hogy pontosan egy olyan x_1 létezik, amire $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ bármely n esetén.

(IMO 1985/6)

Házi feladatok

9. Vezessük le a test- és rendezési axiómákból, hogy ha $a < b < 0$, akkor $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a} < 0$.

10. Izomorf-e a racionális tört függvények teste a valós számok testével?

11. Adott egy R rendezett test, aminek $\mathbb{Q}$ részteste. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$(\forall a, b \in R)\left((1 < a < b < 2) \Rightarrow \Big((\exists q \in \mathbb{Q})\ (a < q < b)\Big)\right),$$

akkor R-ben teljesül az Arkhimédészi axióma.

12. A H halmaz *sehol sem sűrű*, ha

$$\forall a < b\left(\exists c, d\ \big(a < c < d < b\ \wedge\ H \cap (c, d) = \emptyset\big)\right).$$

Bizonyítsuk be, hogy ha $S_1, S_2, \ldots$ sehol sem sűrű halmazok egy tetszőleges sorozata, akkor $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n}$ sűrű.

13. A Cantor-axióma felhasználásával adjunk közvetlen bizonyítást arra, hogy az irracionális számok halmaza sűrű.