Valós analízis gyakorlat, 2010. október 4.

Régi házi feladat

1. Teljesül-e a racionális törtek testében a Cantor-axióma?

2. Mutassunk példát olyan konvex halmazra a racionális tört függvények testében, ami nem intervallum.

3. (a) Legyen I_α $(\alpha \in A)$ korlátos, zárt intervallumok egy rendszere úgy, hogy közülük bármelyik kettőnek létezik közös pontja. Igazoljuk, hogy $\bigcap_{\alpha\in A} I_\alpha \neq \emptyset$. (1-dimenziós Helly-tétel)

(b) Igaz marad-e az 1-dimenziós Helly-tétel, ha nem kötjük ki, hogy az intervallumok zártak?

(c) Igaz marad-e az 1-dimenziós Helly-tétel, ha nem kötjük ki, hogy az intervallumok korlátosak?

4. Milyen $H \subset \mathbb{R}$ halmazokra igaz, hogy

(a) $\inf H < \sup H$; (b) $\inf H = \sup H$; (c) $\inf H > \sup H$?

5. A H halmaz *sehol sem sűrű*, ha

$$\forall a < b \left(\exists c, d \left(a < c < d < b \ \wedge \ H \cap (c, d) = \emptyset\right)\right).$$

Bizonyítsuk be, hogy ha $S_1, S_2, \ldots$ sehol sem sűrű halmazok egy tetszőleges sorozata, akkor $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n}$ sűrű (Baire kategóriatétel).

Feladatok:

6. Egy $H \subset \mathbb{R}$ halmazt nevezzünk *összefüggő*nek, ha tetszőleges $A, B \subset \mathbb{R}$ diszjunkt nyílt halmazok esetén $H \subset (A \cup B) \Rightarrow (H \subset A \vee H \subset B)$. Bizonyítsuk be, hogy

a) $\mathbb{R}$ összefüggő;

b) minden intervallum összefüggő.

7. Legyen R rendezett test, $A = \{x \in R : \ x^2 > 2\}$ és $B = \{x \in R : \ x^2 < 2\}$.

(a) Mutassuk meg, hogy az A és B halmazok nyíltak.

(b) Mutassuk meg, hogy ha R összefüggő, akkor van olyan $a \in R$, amire $a^2 = 2$.

8. Teljesül-e a racionális törtek testében a Cantor-axióma és az Achimédeszi-axióma?

9. Mutassunk példát olyan konvex halmazra a racionális tört függvények testében, ami nem intervallum.

10. (a) Legyen I_α $(\alpha \in A)$ korlátos, zárt intervallumok egy rendszere úgy, hogy közülük bármelyik kettőnek létezik közös pontja. Igazoljuk, hogy $\bigcap_{\alpha\in A} I_\alpha \neq \emptyset$. (1-dimenziós Helly-tétel)

(b) Igaz marad-e az 1-dimenziós Helly-tétel, ha nem kötjük ki, hogy az intervallumok zártak?

(c) Igaz marad-e az 1-dimenziós Helly-tétel, ha nem kötjük ki, hogy az intervallumok korlátosak?

11. Milyen $H \subset \mathbb{R}$ halmazokra igaz, hogy

(a) $\inf H < \sup H$; (b) $\inf H = \sup H$; (c) $\inf H > \sup H$?

12. A H halmaz *sehol sem sűrű*, ha

$$\forall a < b \left(\exists c, d \left(a < c < d < b \ \wedge \ H \cap (c, d) = \emptyset\right)\right).$$

Bizonyítsuk be, hogy ha $S_1, S_2, \ldots$ sehol sem sűrű halmazok egy tetszőleges sorozata, akkor $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n}$ sűrű (Baire kategóriatétel).

13. Legyen K zárt intervallum, és I_α $(\alpha \in A)$ nyílt intervallumoknak egy olyan rendszere, amire $K \subset \bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha$. Igazoljuk, hogy van olyan véges $B \subset A$ halmaz, amire $K \subset \bigcup_{\alpha\in B} I_\alpha$. (Borel fedési tétele)

14. Igazoljuk, hogy ha egy rendezett testben igaz a Helly-tétel, akkor a testben igaz az Arkhimédészi és a Cantor-axióma is.

Házi feladatok

15. Egy H halmazt nevezzünk *zárt*nak, ha a komplementere nyílt. Melyik halmaz zárt az alábbiak közül?

$$\emptyset; \qquad \mathbb{R}; \qquad (a,b); \qquad [a,b]; \qquad \mathbb{Q}; \qquad \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

16. Lehet-e x, y irracionális számok esetén x^y racionális.

17. Igazoljuk, hogy

a) akárhány zárt halmaz metszete is zárt;

b) véges sok zárt halmaz uniója is zárt.

18. A Cantor-axióma felhasználásával adjunk közvetlen bizonyítást arra, hogy az irracionális számok halmaza sűrű.

19. Igazoljuk, hogy ha egy rendezett test összefüggő, akkor a testben igaz az Arkhimédészi és a Cantor-axióma is.