Valós analízis gyakorlat, 2010. október 21.

1.

$$\lim \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n = ?$$

2. Mi az alábbi sorozatok limesz szuperiora és limesz inferiora? Mik a torlódási pontjaik?

$$\sqrt[n]{n}; \qquad (-1)^n + \frac{1}{n}; \qquad \{\sqrt{n}\}$$

3. Igazoljuk közvetlenül a lim sup és a lim inf definíciójából, hogy $\liminf a_n \leq \limsup a_n$.

4. Bizonyítsuk be, hogy ha (a_n) konvergens és (b_n) tetszőleges számsorozat, akkor

$$\underline{\lim}(a_n + b_n) = \lim a_n + \underline{\lim}\, b_n \quad \text{és} \quad \overline{\lim}(a_n + b_n) = \lim a_n + \overline{\lim}\, b_n.$$

5. (a) Bizonyítsuk be, hogy ha a_n és b_n két számsorozat úgy, hogy mindkettő alulról korlátos vagy mindkettő felülről korlátos, akkor

$$\underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n \leq \underline{\lim}(a_n + b_n) \leq \underline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n \leq \overline{\lim}(a_n + b_n) \leq \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n.$$

(b) Keressünk olyan (a_n) és (b_n) korlátos sorozatokat, amikor
(b1) egyik esetben sincs egyenlőség;
(b2–b5) pontosan az egyik egyenlőségnél áll fenn egyenlőség (4 példa).

6. Mutassunk példát olyan sorozatra, amelynek torlódási pontjai éppen a $[0, 1]$ halmaz elemei.

7. Igazoljuk, hogy bármely számsorozat véges torlódási pontjai zárt halmazt alkotnak.

Házi feladatok

8.

$$\lim \left(\frac{n+3}{n-1}\right)^{3n+8} = ?$$

9. Bizonyítsuk be, hogy ha $a_n \to a > 0$ és (b_n) tetszőleges számsorozat, akkor

$$\underline{\lim}(a_n \cdot b_n) = a \cdot \underline{\lim}\, b_n \quad \text{és} \quad \overline{\lim}(a_n \cdot b_n) = a \cdot \overline{\lim}\, b_n.$$

10. Bizonyítsuk be, hogy
(i) ha $a_n \to a \geq 1$ és (b_n) korlátos, akkor

$$\overline{\lim}\, a_n^{b_n} = a^{\overline{\lim}\, b_n} \quad \text{és} \quad \underline{\lim}\, a_n^{b_n} = a^{\underline{\lim}\, b_n}.$$

(ii) ha $a_n \to a \leq 1$ és (b_n) korlátos, akkor

$$\overline{\lim}\, a_n^{b_n} = a^{\underline{\lim}\, b_n} \quad \text{és} \quad \underline{\lim}\, a_n^{b_n} = a^{\overline{\lim}\, b_n}.$$

11. Igazoljuk, hogy ha $n \cdot a_n = a$ és $b_n/d \to b$, akkor $(1 + a_n)^{b_b} \to e^{ab}$.

12. Igaz-e, hogy $\mathbb{R}$ minden zárt részhalmaza előáll, mint egy valós számsorozat véges torlódási pontjaiak halmaza?