Valós analzis gyakorlat, 2010. november 9.

1. Legyen H halmaz és $h : P(H) \to P(H)$ monoton növő halmazfüggvény, amire $X \subset Y \subset H$ esetén $h(X) \subset h(Y) \subset H$. Nevezzünk egy $X \subset H$ halmazt kicsinek, ha $X \subset h(X)$. Egy X halmaz fixpontja h-nek, ha $h(X) = X$.

Legyen A a kicsi halmazok uniója.

(a) Igazoljuk, hogy a A halmaz definciója értelmes, mert létezik legalább egy kicsi halmaz.

(b) Igazoljuk, hogy A kicsi.

(c) Igazoljuk, hogy $h(A)$ kicsi.

(d) Igazoljuk, hogy A fixpontja h-nak.

2. Bizonyítsuk be a Cantor-Schöder-Bernstein tételt: Ha A, B halmazok, és léteznek $f : A \to B$ és $g : B \to A$ injekciók, akkor létezik $A \to B$ bijekció is.

Osszuk fel az A, B halmazokat két-két diszjunkt részre: $A = A_1 \cup A_2$, $B = B_1 \cup B_2$ úgy, hogy $f(A_1) = B_1$ s $g(B_2) = A_2$.

3. Legyen $A = [0, \infty)$, $B = (0, \infty)$, $f : A \to B$, $f(x) = x + 1$, s $g : B \to A$, $g(x) = x$. Adjunk meg egy $A \to B$ bijekciót ezek segítségével!

4. Igazoljuk, hogy a véges hosszú, egészekből áll sorozatok halmaza megszámlálható.

5. Igazoljuk, hogy a magyar betű- s írásjelkészlettel leírható szövegek halmaza megszámlálható.

6. A racionális számokon egy méretei miatt nem látható bolha ugrál. A bolha minden másodpercben egy titkos, de állandó racionális számmal arrébb ugrik (mindig ugyanabba az irányba). Mi minden lépés után az egyik racionális számra rácsapunk. Elpusztíthatjuk-e biztosan a bolhát?

7. Lehet-e a számegyenes minden racionális pontja fölé egy T betűt írni? És minden pontja fölé?

8. Mutassuk meg, hogy valós számok bármely A megszámlálható részhalmazához létezik olyan a valós szám, amire $A \cap (A + a) = \emptyset$

9. Bizonyítsd be, hogy $P(\mathbb{N}) \sim P(\mathbb{Q}) \sim R$.

10. Bizonyítsd be, hogy $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$.

11. Bizonyítsd be, hogy a valós számokból áll végtelen sorozatok halmaza kontinuum számosságú.

12. Igazoljuk, hogy $P(\mathbb{N})$-nek létezik olyan kontinuum számosságú $\mathcal{L}$ részhalmaza, ami lánc, vagyis tetszőleges $A, B \in \mathcal{L}$ esetén $A \subset B$ vagy $B \subset A$.

13. Bizonyítsd be, hogy létezik olyan $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, ami minden intervallumban minden valós értéket felvesz.

Házi feladat

14. Legyen H halmaz és $h : P(H) \to P(H)$ monoton növő halmazfüggvény, amire $X \subset Y \subset H$ esetén $h(X) \subset hY) \subset H$. Nevezzünk egy $X \subset H$ halmazt nagynak, ha $h(X) \subset X$. Egy X halmaz fixpontja h-nek, ha $h(X) = X$.

Legyen A a kicsi halmazok uniója, s legyen B a nagy halmazok metszete.

(a) Igazoljuk, hogy a B halmaz definciója értelmes, mert létezik legalább egy nagy halmaz.

(b) Igazoljuk, hogy B pedig nagy.

(c) Igazoljuk, hogy $h(B)$ pedig nagy.

(d) Igazoljuk, hogy B fixpontja h-nek.

(e) Igazoljuk, hogy ha P fixpontja h-nek, akkor $A \subset P \subset B$, ahol A az 1. feladat alapján van értelezve.

(f) Legyen $X_0 = \emptyset$ és $X_{n+1} = h(X_n)$. Igazoljuk, hogy $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$.

15. Igazoljuk, hogy a véges hosszú, racionális számokból álló sorozatok halmaza megszámlálható. Ugyanakkor igazoljuk, hogy a végtelen hosszú, racionális számokból álló sorozatok halmaza kontinuum számosságú.

16. Igazoljuk, hogy a kínai betű- s írásjelkészlettel leírható matematikai bizonyítások halmaza megszámlálható.

17. Keressünk példát kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésre $(0, 1]$ és $[0, 1]$ között.

18. Igazoljuk, hogy a körvonal kontinuum számosságú. Valamint, hogy a sík mint ponthalmaz kontinuum számosságú.