Valós analízis gyakorlat, 2010. november 11.

1. Konstruáljunk olyan periodikus függvényt, aminek akármilyen kicsi pozitív periódusa is létezik, de nem konstans.

2. Milyen nevezetes egyenlőtlenséget kapunk, ha a Jensen-egyenlőtlenséget felírjuk az x^2 függvényre?

3. Legyen I nem elfajuló intervallum. Igazoljuk, hogy a következő állítások ekvivalensek:

(a) $\forall a,b,c \in I \quad a<b<c \Rightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} < \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$;

(b) $\forall a,b,c \in I \quad a<b<c \Rightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} < \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$;

(c) $\forall a,b,c \in I \quad a<b<c \Rightarrow \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a} < \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$;

(d) $\forall a,b \in I \quad \forall t \in (0,1) \quad a \neq b \Rightarrow f\big(ta+(1-t)b\big) < tf(a)+(1-t)f(b)$;

(e) minden $a \in I$-re az $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ függvény szigorúan nő az $I \setminus \{a\}$ halmazon;

(f) I minden belső a pontjához létezik olyan b valós szám, hogy bármely $x \in I \setminus \{a\}$ esetén $f(x) > b(x-a)+f(a)$.

4. Ellenőrizzük a folytonosság definícióját; adjunk meg $\varepsilon > 0$-hoz jó δ-t, vagy olyan ε-t, amihez nincs δ.

a) $f(x)=x^3$, $a=0$; b) $f(x)=\{x\}$, $a=3$; c) $f(x)=\sqrt{x}$, $a=\dfrac{1}{25}$; d) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$, $a=4$.

5. Azt mondjuk, hogy az U halmaz "környezete" az a számnak, ha a szám belső pontja U-nak, azaz $\exists r>0 \; B(a,r) \subset U$. Igazoljuk, hogy az f függvény akkor és csak akkor folytonos a-ban, ha $f(a)$ bármely környezetének f szerinti ősképe környezete a-nak.

6. Igazoljuk, hogy ha f konvex az I intervallumon, akkor I felbontható két olyan részre, amin f monoton növekvő, illetve monoton csökkenő.

7. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény minden racionális pontban folytonos, akkor van olyan irracionális pont is, ahol folytonos.

Házi feladatok:

8. Ellenőrizzük a folytonosság definícióját; adjunk meg $\varepsilon > 0$-hoz jó δ-t, vagy olyan ε-t, amihez nincs δ.

a) $f(x)=x^2$, $a=2$; b) $f(x)=[x]$, $a=3$; c) $f(x)=\sqrt{x}$, $a=2$; d) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, $a=3$.

9. Milyen nevezetes egyenlőtlenséget kapunk, ha a Jensen-egyenlőtlenséget felírjuk az $1/x$ függvényre az $(0,\infty)$ félegyenesen?

10. Igazoljuk, hogy ha $g: A \to B$ és $f: B \to C$ konvex, továbbá f nonoton nő, akkor $f \circ g$ is konvex.

11. Igazoljuk, hogy ha f konvex, akkor felbontható egy monoton növekvő és egy monoton csökkenő függvény összegére.

12. Igazoljuk, hogy egy $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor folytonos minden pontban, ha minden nyílt halmaz ősképe nyílt.

13. Előáll-e a x^2 függvény két periodikus függvény összegeként?

14. Konstruáljunk olyan $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, aminek kontinuumféle különböző periódusa van, de nem konstans.