Valós analízis gyakorlat, 2010. november 18.

1.

$$\varliminf_{x\to\infty}\left(\{2x\}^2-4\{x\}^2\right)=? \qquad \varlimsup_{x\to\infty}\left(\{2x\}^2-4\{x\}^2\right)=?$$

2. (a) Bizonyítsuk be, hogy ha $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ periodikus, akkor $\varliminf_{\infty} f=\inf f$ és $\varlimsup_{\infty} f=\sup f$.

(b) Bizonyítsuk be, hogy ha $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ periodikus és $\lim_{\infty} f$ létezik, akkor f konstans.

3. Mutass példát olyan $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényre, aminek minden pontban 0 a határértéke, de a függvény nem azonosan 0.

4. Írjuk fel a Cauchy-kritériumot ε,δ,K,L stb. betűkkel az $\alpha=1$, $\alpha=a+0$, $\alpha=-\infty$ esetekben!

5. Ellenőrizzük a Cauchy-kritériumot az $\lim_{x\to+0}\sqrt{x}$ határértékre.

6. Igazoljuk, hogy ha az $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ függvényre $\forall\varepsilon>0\ \exists K>0\ \forall x,y>K\ |f(x)-f(y)|<\dfrac{1}{|x|}$, akkor $\lim_{\infty} f$ létezik és véges.

7. Az f függvény "Lipschitz tulajdonságú", ha $\exists K\in\mathbb{R}\ \forall x,y\in D(f)\ |f(x)-f(y)|\le K|x-y|$. Bizonyítsuk be, hogy ha f Lipschitz az a pont egy környezetében, akkor ott folytonos is.

8. Igazoljuk, hogy minden nem üres perfekt halmaz kontinuum számosságú.

Házi feladatok:

9. Írjuk fel a Cauchy-kritériumot ε,δ,K,L stb. betűkkel az $\alpha=0$, $\alpha=a-0$, $\alpha=\infty$ esetekben!

10. Ellenőrizzük a Cauchy-kritériumot az $\lim_{x\to\infty}\{x\}$ határértékre.

11. Igaz-e, hogy ha $f_1,f_2,\dots$ folytonos, nemnegatív értékű függvények egy sorozata, akkor az $F(x)=\inf\{f_1(x),f_2(x),\dots\}$ függvény is folytonos?

12. Bizonyítsuk be, hogy ha f Lipschitz tulajdonságú az $(a,a+\delta_0)$ intervallumban, akkor $\lim_{a+0} f$ létezik és véges.

13. Legyen $A_1,A_2,\ldots\subset\mathbb{R}$ végtelen halmazsorozat, és α az közös torlódási pontja az A_n halmazoknak. Legyen továbbá f valós értékű függvény, ami értelmes az α egy pontozott környezetében. Melyik igaz az alábbiak közül?

$$(a)\quad \varlimsup_{\alpha,A_1\cup A_2\cup\dots} f\le\inf\left\{\varlimsup_{\alpha,A_n} f:\ n\in\mathbb{N}\right\} \qquad (b)\quad \varlimsup_{\alpha,A_1\cup A_2\cup\dots} f\ge\inf\left\{\varlimsup_{\alpha,A_n} f:\ n\in\mathbb{N}\right\}$$

$$(c)\quad \varliminf_{\alpha,A_1\cup A_2\cup\dots} f\le\inf\left\{\varliminf_{\alpha,A_n} f:\ n\in\mathbb{N}\right\} \qquad (d)\quad \varliminf_{\alpha,A_1\cup A_2\cup\dots} f\ge\inf\left\{\varliminf_{\alpha,A_n} f:\ n\in\mathbb{N}\right\}$$