Valós analízis gyakorlat, 2010. december 13.

1.
$$\lim_{x\to+0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=?$$

2. Igazoljuk, hogy $0<x$, $x\neq 1$ esetén $\ln x<x-1$.

3. Az $e^t>1+t$ egyenlőtlenség n-edik hatványra emelésével igazoljuk, hogy ha $x>0$, akkor
$$e^x>1+x+\frac{x^2}{2}.$$

4. Mutassuk olyan a,b valós számokat, amikre $|x|<\frac{1}{2}$ esetén $1+x+ax^2<e^x<1+x+bx^2$.

5. Igazoljuk, hogy rögzített $a_1,\ldots,a_n,w_1,\ldots,w_n>0$ esetén
$$\lim_{p\to 0}\left(\frac{w_1a_1^p+\ldots+w_na_n^p}{w_1+\ldots+w_n}\right)^p=(a_1^{w_1}\cdot\ldots\cdot a_n^{w_n})^{\frac{1}{w_1+\ldots+w_n}},$$
azaz a $p\mapsto H(p,a_1,\ldots,a_n,w_1,\ldots,w_n)$ függvény folytonos a 0-ban.

6. Alakítsd négzetösszeggé az
$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)-(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2$$
kifejezést.

7. Igazoljuk, hogy ha $a_1,\ldots,a_n>0$ és $x_1,\ldots,x_1>0$, akkor
$$\frac{a_1^2}{x_1}+\ldots+\frac{a_n^2}{x_n}\geq\frac{(a_1+\ldots+a_n)^2}{x_1+\ldots+x_n}.$$
(A CSB egyenlőtlenség Engel-féle alakja... de miért is?)

8. Igazoljuk, hogy ha $a,b,c>0$, akkor
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$
(Nesbitt-egyenlőtlenség)

9. Bizonyítsuk be, hogy ha $a,b,c>0$ és $a+b+c=1$, akkor
$$\left(\frac{1}{a}+1\right)\left(\frac{1}{b}+1\right)\left(\frac{1}{c}+1\right)\geq 8.$$

Házi feladatok:

10.
$$\lim_{x\to-0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=?$$

11. Igazoljuk, hogy $0<x<1$ esetén $\ln(1-x)>\dfrac{1}{x}$.

12. Igazoljuk, hogy $x>0$, $n\in\mathbb{N}$ esetén
$$e^x>1+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}.$$

13. Mutassuk olyan a,b valós számokat, amikre $|x|<\frac{1}{2}$ esetén $x+ax^2<\ln(1+x)<x+bx^2$.

14. Mi a kapcsolat a CSB egyenlőtlenség és a súlyozott AM-QM egyenlőtlenség között?

15. Vezessük le a Nesbitt-egyenlőtlenséget a CSB egyenlőtlenség Engel-féle alakjából. (Bővítsük a törteket úgy, hogy a számlálókban teljes négyzetek legyenek.)

16. Igazoljuk, hogy $\ln(n+1)<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}\leq(\ln n)+1$.

17 (*). Igazoljuk, hogy ha $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=1$, akkor
$$a_1^2a_2+a_2^2a_3+\ldots+a_n^2a_1<\frac{\sqrt{2}}{3}.$$
(IMO Shortlist, 2007)