Kiegészítő jegyzet a valós analízis előadásokhoz

(Utolsó frissítés: 2011. január 8., 20:30)

Az előadásokon alapvetően a Laczkovich – T. Sós könyvet követjük, de több témát nem úgy adtam elő, mint ahogy a könyvben van. Ebben a jegyzetben az előadásoknak a könyvön kívüli anyagát igyekszem leírni.

1. Számsorozatok limesz szuperiora és limesz inferiora; határérték és egyenlőtlenségek

1.1. A limesz szuperior és a limesz inferior definíciója

Számsorozat limesz szuperiora és limesz inferiora. Kapcsolat a inf sup és lim sup, illetve sup inf és lim inf között.

1. Definíció. *Legyen (a_n) valós számsorozat, és $\alpha \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Azt mondjuk, hogy „$\alpha$ torlódási pontja az (a_n) sorozatnak", vagy „az (a_n) sorozat torlódik az α ponthoz", ha az (a_n) sorozatnak létezik α-hoz tartó részsorozata.*

1. Tétel. *Az α akkor és csak akkor torlódási pontja az (a_n) sorozatnak, ha α bármely U környezetére $a_n \in U$ végtelen sok n index esetén.*

Biz. $\Rightarrow$ Ha α torlódási pont U az α egy tetszőleges környezete, akkor létezik egy $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, amire $a_{n_k} \to \alpha$ erre véges sok kivétellel $a_{n_k} \in U$. Ezzel találtunk végtelen sok n_k-t, amire $a_{n_k} \in U$.

$\Leftarrow$ A megfordításhoz legyen tetszőleges k pozitív egészre $U_k = B(\alpha, \frac{1}{k}) = (\alpha - \frac{1}{k}, \alpha + \frac{1}{k})$ ha α véges, $U_k = (k, \infty)$ ha $\alpha = \infty$, illetve $U_k = (-\infty, -k)$ ha $\alpha = -\infty$.

Definiáljuk az $n_1, n_2, \ldots$ indexsorozatot rekurzívan a következőképpen: legyen n_1 az első olyan index, amire $a_{n_1} \in U_1$. Ha $n_1, n_2, \ldots, a_{n_{k-1}}$-et már definiáltuk, akkor legyen n_k az első olyan index, amire $n_k > n_{k-1}$ és $a_{n_k} \in U_k$. Mivel a feltételek szerint minden k-hoz létezik végtelen sok olyan n index, amire $a_n \in U_k$, ezért a keresett n_k index mindig létezik.

A konstruált indexsorozatban $n_1 < n_2 < \ldots$, vagyis (a_{n_k}) részsorozata (a_n)-nek. Mivel pedig $a_{n_k} \in U_k$, ez a sorozat valóban α-hoz tart. $\square$

2. Definíció. *Legyen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ valós számok tetszőleges sorozata. Az (a_n) sorozat* limesz szuperior*ának, illetve* limesz inferior*ának nevezzük a következő mennyiségeket:*

$$\limsup a_n = \begin{cases} \inf\left\{ \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} : n \in \mathbb{N} \right\} & \text{ha az } (a_n) \text{ sorzat felülről korlátos} \\ \infty & \text{ha az } (a_n) \text{ sorzat nem korlátos felülről} \end{cases}$$

illetve

$$\liminf a_n = \begin{cases} \sup\left\{ \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} : n \in \mathbb{N} \right\} & \text{ha az } (a_n) \text{ sorzat alulról korlátos} \\ -\infty & \text{ha az } (a_n) \text{ sorzat nem korlátos alulról} \end{cases}$$

A lim sup *és* lim inf *jelölés mellet/helyett szokás az* $\overline{\lim}$, *illetve* $\underline{\lim}$ *jelölés is. Ha a jelölés egyértelműségéhez szükséges (mert pl. a sorozatban az indexen kívül más paraméter is szerepel), a limesz jelöléséhez hasonlóan, feltüntethetjük a futó indexet a jelölés alatt:*

$$\limsup a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}\, a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n; \qquad \liminf a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}\, a_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n.$$

1. Megjegyzés. *Ha az a_n sorozat nem korlátos felülről, akkor a* $\sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} = \infty$ *minden n-re. Ha a szuprémum és az infimum definícióját a $\pm\infty$-t tartalmazó halmazokra is kiterjesztjük, akkor nincs szükség a korlátosság szerinti esetszétválasztásra:*

$$\limsup a_n = \inf\big\{\sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} : n \in \mathbb{N}\big\}$$
$$\liminf a_n = \sup\big\{\inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} : n \in \mathbb{N}\big\}$$

2. Megjegyzés. *Legyen a_n sorozat, és tekintsük a $b_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$ $c_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$ sorozatokat. Ekkor az (b_n) sorozat monoton nő, míg a (c_n) sorozat monoton fogy. Ezért a monoton sorozatokról tanultak szerint mindkét sorozatnak létezik határértéke,* $\lim b_n = \sup b_n$, *és* $\lim c_n = \inf c_n$. *Tehát,*

$$\liminf a_n = \sup b_n = \lim b_n = \liminf\{a_n, a_{n+1}, \dots\},$$
$$\limsup a_n = \sup c_n = \lim c_n = \limsup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}.$$

Ezért (is) írunk „lim sup”-ot és „lim inf”-et „inf sup” és „sup inf” helyett.

1. Példa. *Legyen $a_n = (-1)^n$. Ekkor minden n-re* $\sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} = \{1, -1\}$, *ennek megfelelően* $\sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} = 1$ *és* $\inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} = -1$, *tehát* $\liminf(-1)^n = -1$ *és* $\limsup(-1)^n = 1$.

Legyen $b_n = n$. Ekkor minden n-re $\sup\{b_n, b_{n+1}, b_{n+2}, \dots\} = \{n, n+1, \dots\}$, *ennek megfelelően* $\sup\{b_n, b_{n+1}, b_{n+2}, \dots\} = \infty$ *és* $\inf\{b_n, b_{n+1}, b_{n+2}, \dots\} = n$, *tehát* $\liminf n = \limsup n = \infty$.

1.2. A limesz szuperior és a limesz inferior alaptulajdonságai

A lim sup, illetve lim inf a legnagyobb érték, ahova valamilyen részsorozat tart. lim inf $\leq$ lim sup. A véges és végtelen határértékek jellemzése lim inf-fel és lim sup-pal.

2. Tétel.

$$\limsup(-a_n) = -\liminf a_n.$$

Biz.

$$\limsup(-a_n) = \inf\big\{\sup\{-a_n, -a_{n+1}, \dots\} : n \in \mathbb{N}\big\} = \inf\big\{-\inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\} : n \in \mathbb{N}\big\} =$$
$$= -\sup\big\{\inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\} : n \in \mathbb{N}\big\} = -\liminf a_n. \qquad \square$$

3. Tétel. *(a) Ha $a_n \leq b$ elég nagy n-re, akkor* $\limsup a_n \leq b$.
(b) Ha $a_n \geq b$ elég nagy n-re, akkor $\liminf a_n \geq b$.

Biz. (a) Ha $n \geq n_0$, akkor $a_n \leq b$, tehát b felső korlátja a $\{a_{n_0}, a_{n_0+1} \dots\}$ halmaznak. Ezért

$$\limsup a_n = \inf\big\{\sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\} : n \in \mathbb{N}\big\} \leq \sup\{a_{n_0}, a_{n_0+1}, \dots\} \leq b.$$

(b) ugyanígy. $\square$

1. Lemma. *Legyen a_n valós számsorozat és $b \in \overline{\mathbb{R}}$.*
(a) Ha $b > \limsup a_n$, akkor véges sok kivétellel $a_n < b$.
(b) Ha $b < \liminf a_n$, akkor véges sok kivétellel $a_n > b$.
(c) Ha $b < \limsup a_n$, akkor végtelen sok n indexre $a_n > b$.
(d) Ha $b > \liminf a_n$, akkor végtelen sok n indexre $a_n < b$.

Biz. (a) Ha $\limsup a_n < b$, azaz $\inf\big\{\sup\{a_{n_0}, a_{n_0+1}, \dots\} : n_0 \in \mathbb{N}\big\} < b$, akkor b nem alsó korlátja a $\sup\{a_{n_0}, a_{n_0+1}, \dots\}$ alakú számoknak. Következésképpen van olyan n_0, amire $\sup\{a_{n_0}, a_{n_0+1}, \dots\} < b$. Ebből viszont következik, hogy az $a_{n_0}, a_{n_0+1}, \dots$ számok mindegyike kisebb b-nél.

(c) Ha $\limsup a_n > b$, azaz $\inf\big\{\sup\{a_{n_0}, a_{n_0+1}, \dots\} : n_0 \in \mathbb{N}\big\} > b$, akkor a $\sup\{a_{n_0}, a_{n_0+1}, \dots\}$ alakú számok mindegyike nagyobb b-nél. Ezért az $a_{n_0}, a_{n_0+1}, \dots$ elemek között mindig van b-nél nagyobb.

A (b) és (d) állításokat ugyanígy bizonyíthatjuk. $\square$

4. Tétel. *(a)* $\limsup a_n$ *torlódási pontja az* (a_n) *sorozatnak, és ez a legnagyobb torlódási pont;*
(b) $\liminf a_n$ *torlódási pontja az* (a_n) *sorozatnak, és ez a legkisebb torlódási pont;*
(c) $\liminf a_n \leq \limsup a_n$.

Biz. (a) Először azt igazoljuk, hogy $\limsup a_n$ torlódási pont. Legyen $\alpha = \limsup a_n$, és U az α egy tetszőleges környezete. Azt akarjuk megmutatni, hogy az (a_n) sorozatnak végtelen sok eleme esik az U halmazba.

Ha α véges, akkor $U = (\beta, \gamma)$ alakú, ahol $\beta < \alpha$ és $\gamma > \alpha$ valós számok. Ha $\alpha = \infty$, akkor $U = (\beta, \infty)$, ahol $\beta < \alpha$; ilyenkor legyen $\gamma = \infty$. Végül, ha $\alpha = -\infty$, akkor $U = (-\infty, \gamma)$, ahot $\gamma > \alpha$; ilyenkor legyen $\beta = -\infty$.

Akár $\beta < \alpha$, akár $\beta = -\infty$ esetén teljesül, hogy az (a_n) sorozatnak végtelen sok eleme nagyobb, mint β. Az eőbbi esetben ez az 1. lemma miatt igaz, az utóbbi esetben triviálisan. Hasonlóan, akár $\gamma > \alpha$, akár $\gamma = \infty$ esetén igaz, hogy a sorozat elemei véges sok kivétellel kisebbek, mint γ. Tehát, véges sok elem nagyobb, mint β, de ezek közül csak véges sok nem kisebb, mint γ. Tehát végtelen sok elem esik az $(\beta, \gamma) = U$ intervallumba.

Most tegyük fel indirekten, hogy létezik egy α torlódási pont, amire $\alpha > \limsup a_n$. Legyen c egy olzan valós szám, ami a kettő közé esik: $\limsup a_n < c < \alpha$. Mivel α torlódási pont, létezik végtelen sok olyan n index, amire $a_n > c$. Másfelől a 1. lemma miatt $a_n \geq c$ csak véges sok indexre teljesülhet. A kettő ellentmond egymásnak. Tehát nincs $\limsup a_n$-nál nagyobb torlódási pont.

A (b) állítást ugyanígy igazolhatjuk.

(c) Mivel $\liminf a_n$ a legkisebb, $\limsup a_n$ pedig a legnagyobb torlódási pont, $\liminf a_n \leq \limsup a_n$. $\square$

5. Tétel. *(a)* $a_n \to a \iff \liminf a_n = \limsup a_n = a$.
(b) $a_n \to \infty \iff \liminf a_n = \infty$;
(c) $a_n \to -\infty \iff \limsup a_n = -\infty$;

Biz. (a) Ha $a_n \to a$, akkor minden $\varepsilon > 0$ esetén $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ véges sok kivétellel. A 3. tétel (vagy az 1. lemma (b) és (d) része) szerint ebből következik, hogy $a - \varepsilon \leq \liminf a_n$, illetve $a + \varepsilon \geq \limsup a_n$. Tehát,

$$a - \varepsilon \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq a + \varepsilon.$$

Mivel ez minden $\varepsilon > 0$-ra teljesül, $\liminf a_n = \limsup a_n = a$.

Megfordítva, ha $\liminf a_n = \limsup a_n = a$, akkor az 1. lemma (a) és (c) miatt tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén véges sok kivétellel $a_n < a + \varepsilon$, és véges sok kivétellel $a_n > a - \varepsilon$. Összességében, véges sok kivétellel $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

(b) Ha $a_n \to \infty$, akkor minden $P \in \mathbb{R}$ esetén $a_n > P$ véges sok kivétellel. A 3. tétel (az 1. lemma (b) része) szerint ebből következik, hogy $\liminf a_n \geq P$. Tehát $\liminf a_n \geq P$ bármely valós számra, ami csak akkor lehetséges, ha $\liminf a_n = \infty$.

Megfordítva, ha $\liminf a_n = \infty$, akkor az 1. lemma (a) pontja szerint bármely P valós számra véges sok kivétellel $a_n > P$, vagyis $a_n \to \infty$.

A (c) állítás az (b)-hez hasonlóan igazolható. $\square$

1. Következmény. *Az* (a_n) *sorozatnak akkor és csak akkor létezik (véges vagy végtelen) határértéke, ha* $\limsup a_n = \liminf a_n$*; ilyenkor a* $\limsup$ *és a* $\liminf$ *megegyezik a határértékkel. Más szóval,* $a_n \to \alpha$ *akkor és csak akkor, ha* $\limsup a_n = \liminf a_n = \alpha$.

2. Következmény. *Az* (a_n) *sorozatnak akkor és csak akkor létezik (véges vagy végtelen) határértéke, ha csak egy torlódási pontja van. Avagy,* (a_n) *akkor és csak akkor oszcillálva divergens, ha legalább két torlódási pontja van.*

1.3. Határérték és egyenlőtlenségek

Határátmenet. A rendőr-elv és változatai. (v.ö. TK 77–79, 90–91).

6. Tétel. *Legyen (a_n) és (b_n) két számsorozat.*
(a) Ha elég nagy n esetén $a_n \le b_n$, akkor

$$\limsup a_n \le \limsup b_n \qquad \text{és} \qquad \liminf a_n \le \liminf b_n.$$

(b) Ha $\limsup a_n < \liminf b_n$, akkor elég nagy n esetén $a_n < b_n$.

Biz. (a) Tegyük fel indirekten, hogy $\limsup b_n < \limsup a_n$. Vegyünk a kettő között egy c számot. Az 1. lemma (a) pontja szerint véges sok kivétellel $b_n < c$, a 3. tétel / 1. lemma (b) szerint pedig végtelen sokszor $a_n > c$. Létezik tehát végtelen sok olyan n, amikor $b_n < c < a_n$. Ez viszont ellentmond annak, hogy elég nagy n esetén $a_n \le b_n$.

A $\liminf a_n \le \liminf b_n$ egyenlőtlenséget ugyanígy.

(b) Vegyünk egy olyan c számot, amire $\limsup a_n < c < \liminf b_n$. Az 1. lemma (a) és (b) szerint véges sok kivétellel $a_n < c$, és véges sok kivétellel $b_n > c$. Összességében véges sok kivétellel $a_n < c < b_n$. □

3. Következmény. *Legyen (a_n) és (b_n) két konvergens számsorozat.*
(a) Ha elég nagy n esetén $a_n \le b_n$, akkor $\lim a_n \le \lim b_n$. (Határátmenet)
(b) Ha $\lim a_n < \lim b_n$, akkor elég nagy n esetén $a_n < b_n$.

2. Példa. *A tétel (a) részében ha azt kötjük ki, hogy elég nagy n-re $a_n < b_n$, abból még nem következik, hogy $\lim a_n < \lim b_n$. Például az $a_n = 0$, $b_n = \frac{1}{n}$ sorozatokra $a_n < b_n$, mégis $\lim a_n = \lim b_n = 0$.*

Ha a (b) állításban csak azt kötjük ki, hogy $\lim a_n \le \lim b_n$, akkor az állítás már nem lesz igaz. Például az $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = 0$ sorozatokra $\lim a_n = \lim b_n$, de egyik sorozat sem nagyobb, mint a másik.

7. Tétel (Rendőr-elv).
(a) Ha (a_n), (b_n) és (c_n) három számsorozat, amelyekre elég nagy n esetén $a_n \le b_n \le c_n$, továbbá $\liminf a_n = \limsup c_n = a$, ahol $a \in \mathbb{R}$, akkor $b_n \to a$.
(b) Ha (a_n), (b_n) és (c_n) három számsorozat, amelyekre elég nagy n esetén $a_n \le b_n \le c_n$, továbbá $\lim a_n = \lim c_n = a$, ahol $a \in \mathbb{R}$, akkor $b_n \to a$.
(c) Ha (a_n) és (c_n) két számsorozat, amelyekre elég nagy n esetén $|a_n| \le c_n$, továbbá $c_n \to 0$, akkor $a_n \to 0$.

(Két rendőr közrefogja a gyanús egyént.)

Biz. (a)

$$a = \liminf a_n \le \liminf b_n \le \limsup b_n \le \limsup c_n = a.$$

Tehát $\liminf b_n = \limsup b_n = a$, vagyis $b_n \to a$.

A (b) triviálisan következik az (a)-ból.

(c) Legyen $b_n = -c_n$. Ekkor elég nagy n esetén $b_n \le a_n \le c_n$, és (b) alkalmazható. □

A következő tételt hívhatjuk végtelen rendőr-elvnek, honvéd-elvnek vagy Hofi nyomán akár csősz-elvnek is. (Hofi: jött a csősz, és mindenkit kizavart az erdőből.)

8. Tétel. *(a) Ha (a_n) és (b_n) két számsorozat, amelyekre elég nagy n esetén $a_n \le b_n$, továbbá $a_n \to \infty$, akkor $b_n \to \infty$.*
(b) Ha (a_n) és (b_n) két számsorozat, amelyekre elég nagy n esetén $a_n \le b_n$, továbbá $b_n \to -\infty$, akkor $a_n \to -\infty$.

Biz. (a) $\liminf b_n \ge \liminf a_n = \lim a_n = \infty$, tehát $\liminf b_n = \infty$ és $b_n \to \infty$.

(b) ugyanígy.

2. Korlátos sorozatok

Monoton részsorozat létezése. Bolzano-Weierstrass tétel. Cauchy-kritérium. A valós számok konstruktív felépítése Cauchy-sorozatok ekvivalenciaosztályaival. (TK 91–100).

2.1. Alternatív bizonyítás a Bolzano-Weierstrass-tételre

9. Tétel (Bolzano-Weierstrass-tétel). *Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.*

Biz. A sorozat korlátos, ezért a limesz szuperiora és limesz inferiora is véges. Például a limesz szuperior egy véges torlódási pont.

3. Megjegyzés. *A tankönyvi bizonyítás éppen egy, a limesz szuperiorhoz konvergáló részsorozatot konstruál.*

2.2. Alternatív bizonyítás a Cauchy-kritérium elégségességére

3. Definíció. *Legyen (a_n) valós számsorozat. Azt mondjuk, hogy „a sorozat Cauchy-tulajdonságú", vagy röviden „Cauchy-sorozat", ha*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n, m \geq n_0 \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

10. Tétel (Cauchy-kritérium). *Tetszőleges (a_n) valós számsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.*

Bizonyítás a „csak akkor" részre. A sorozat korlátos, ezért a limesz szuperiora és limesz inferiora is véges. A konvergenciához azt kell igazolnunk, hogy $b = \liminf a_n = \limsup a_n$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, és n_0 az a küszöbindex, amit a Cauchy-kritérium biztosít. Ekkor minden $n \geq n_0$-ra $|a_n - a_{n_0}| < \varepsilon$, ezért

$$\begin{gathered} a_{n_0} - \varepsilon < a_n < a_{n_0} + \varepsilon, \\ a_{n_0} - \varepsilon \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq a_{n_0} + \varepsilon, \\ 0 \leq \limsup a_n - \liminf a_n \leq 2\varepsilon. \end{gathered}$$

Mivel ez minden pozitív ε-ra igaz, $\limsup a_n = \liminf a_n$.

3. Függvények limesz szuperiora és limesz inferiora

Ebben a részben definiáljuk függvények alsó és felső határértékét. A definíció és a legtöbb bizonyítás lényegében ugyanaz lesz, mint a sorozatoknál, csak a „elég nagy n-re ...” vagy „véges sok kivétellel ...” kitétételeket kell kicserélnünk arra, hogy „elég kis pontozott környezetben ...”, illetve ezek tagadásában, a „végtelen sok n-re ...” kitétel helyett az írjuk, hogy „minden pontozott környezetben van olyan x, amire ...”.

3.1. A limesz szuperior és a limesz inferior definíciója

4. Definíció. *Legyen $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, és $A \subset \mathbb{R}$ olyan számhalmaz, amelynek α torlódási pontja. Legyen továbbá f olyan függvény, ami értelmes az $A \cap \dot{U}_0$ halmaz pontjaiban, ahol $\dot{U}_0$ az α egy pontozott környezete.*

Az f függvény α-beli limesz szuperiorát és limesz inferiorát az A halmazra szorítkozva a következőképpen definiáljuk:

$$\limsup_{\alpha,\, A} f = \limsup_{x\to\alpha,\, x\in A} f(x) = \inf\big\{\sup f(\dot{U}\cap A) : \dot{U} \subset \dot{U}_0 \text{ pontozott környezete } \alpha\text{-nak}\big\};$$
$$\liminf_{\alpha,\, A} f = \liminf_{x\to\alpha,\, x\in A} f(x) = \sup\big\{\inf f(\dot{U}\cap A) : \dot{U} \subset \dot{U}_0 \text{ pontozott környezete } \alpha\text{-nak}\big\}.$$

4. Megjegyzés. *A definíció csak formálisan függ a $\dot{U}_0$ környezettől; megmutatjuk, hogy az eredményül kapott értékek minden környezetre ugyanazok.*

Csak a limsupra vonakozó állítást bizonyítjuk.

Legyen $\dot{U}_0$ és $\dot{U}_1$ az α két tetszőleges pontozott környezete és $\dot{U}_2 = \dot{U}_0 \cap \dot{U}_1$. Elég megmutatnunk, hogy

$$\inf\big\{\sup f(\dot{U}\cap A) : \dot{U} \subset \dot{U}_0\big\} = \inf\big\{\sup f(\dot{U}\cap A) : \dot{U} \subset \dot{U}_2\big\}.$$

Egyrészt, mivel $\dot{U}_2 \subset \dot{U}_0$,

$$\big\{\sup f(\dot{U}\cap A) : \dot{U} \subset \dot{U}_2\big\} \subset \big\{\sup f(\dot{U}\cap A) : \dot{U} \subset \dot{U}_0\big\},$$
$$\inf\big\{\sup f(\dot{U}\cap A) : \dot{U} \subset \dot{U}_2\big\} \geq \inf\big\{\sup f(\dot{U}\cap A) : \dot{U} \subset \dot{U}_0\big\}.$$

Másrészt tetszőleges $\dot{V} \subset \dot{U}_0$ környezetre

$$f(\dot{V}\cap\dot{U}_2\cap A) \subset f(\dot{V}\cap A) \quad \text{és így} \quad \sup f(\dot{V}\cap\dot{U}_2\cap A) \leq \sup f(\dot{V}\cap A),$$
$$\inf\big\{\sup f(\dot{U}\cap\dot{U}_2\cap A) : \dot{U} \subset \dot{U}_0\big\} \leq \sup f(\dot{V}\cap\dot{U}_2\cap A) \leq \sup f(\dot{V}\cap A).$$

Az $\dot{U}\cap\dot{U}_2$ alakban, ahol $\dot{U} \subset \dot{U}_0$ pontosan azok a pontozott környezetek állnak elő, amelyek részei $\dot{U}_2$-nek, ezért az utolsó sor elejét és végét így is írhatjuk:

$$\inf\big\{\sup f(\dot{U}\cap A) : \dot{U} \subset \dot{U}_2\big\} \leq \sup f(\dot{V}\cap A).$$

Tehát $\inf\big\{\sup f(\dot{U}\cap A) : \dot{U} \subset \dot{U}_2\big\}$ alsó korlátja a $\big\{\sup f(\dot{V}\cap A) : \dot{V} \subset \dot{U}_0\big\}$ halmaznak. Ezért

$$\inf\big\{\sup f(\dot{U}\cap A) : \dot{U} \subset \dot{U}_2\big\} \leq \inf\big\{\sup f(\dot{V}\cap A) : \dot{V} \subset \dot{U}_0\big\}.$$

3.2. A limesz szuperior és a limesz inferior alaptulajdonságai

11. Tétel.

$$\limsup_{\alpha,A} (-f) = -\liminf_{\alpha,A} f.$$

Biz. Ugyanúgy, mint sorozatoknál:

$$\limsup_{\alpha,\,A}(-f) = \inf\left\{\sup -f(\dot U\cap A):\ \dot U\subset \dot U_0\right\} = \inf\left\{-\inf f(\dot U\cap A):\ \dot U\subset \dot U_0\right\} =$$
$$= -\sup\left\{\inf f(\dot U\cap A):\ \dot U\subset \dot U_0\right\} = -\liminf_{\alpha,\,A} f.$$

12. Tétel.

(a) Ha valamely $\dot U_0$ pontozott környezetre $\forall\in x\in(\dot U_0\cap A)\ f(x)\le b$, akkor $\limsup_{\alpha,A} f\le b$.

(b) Ha valamely $\dot U_0$ pontozott környezetre $\forall\in x\in(\dot U_0\cap A)\ f(x)\ge b$, akkor $\liminf_{\alpha,A} f\ge b$.

Biz. Ugyanúgy, mint sorozatoknál.

(a)
$$\limsup_{\alpha,\,A} f = \inf\left\{\sup f(\dot U\cap A):\ \dot U\subset \dot U_0\right\}\le \sup f(\dot U_0\cap A)\le b.$$

(b) Ugyanúgy.

2. Lemma.

(1a) Ha $b>\limsup_{\alpha,A} f$, akkor létezik α-nak olyan $\dot U$ pontozott környezete, hogy $\forall x\in(\dot U\cap A)\ f(x)<b$.

(1b) Ha $b<\liminf_{\alpha,A} f$, akkor létezik α-nak olyan $\dot U$ pontozott környezete, hogy $\forall x\in(\dot U\cap A)\ f(x)>b$.

(2a) Ha $b<\limsup_{\alpha,A} f$, akkor α-nak minden $\dot U$ pontozott környezetére $\exists x\in(\dot U\cap A)\ f(x)>b$.

(2b) Ha $b>\liminf_{\alpha,A} f$, akkor α-nak minden $\dot U$ pontozott környezetére $\exists x\in(\dot U\cap A)\ f(x)<b$.

Biz. Csak az (1a) és a (2a) részt bizonyítjuk. A másik kettő ugyanúgy megy, ha a rendezést mindenhol megfordítjuk, és a szuprémumot mindenhol infimumra cseréljük és fordítva.

(1a) Ha $b>\inf\left\{\sup f(\dot U\cap A):\ \dot U\subset \dot U_0\right\}$, akkor b nem alsó korlátja az összes $\sup f(\dot U\cap A)$-nak, tehát valamelyik $\dot U$ pontozott környezetre $\sup f(\dot U\cap A)<b$. Ez a b nagyobb az $f(\dot U\cap A)$ legkisebb felső korlátjánál, tehát minden $x\in(\dot U\cap A)$-ra $x\le\sup f(\dot U\cap A)<b$.

(2a) Ha $b<\inf\left\{\sup f(\dot U\cap A):\ \dot U\subset \dot U_0\right\}$, akkor $\sup f(\dot U\cap A)>b$ minden $\dot U$ pontozott környezetre, tehát $f(\dot U\cap A)$-nak van b-nél nagyobb eleme. □

13. Tétel. $\liminf_{\alpha,A} f\le\limsup_{\alpha,A} f$.

Biz. Indirekt bizonyítunk. Legyen $\beta=\liminf_{\alpha,A} f$ és $\gamma=\liminf_{\alpha,A} f$. Ha az állítás hamis, akkor $\beta<\gamma$. Vegyünk egy c számot, amire $\beta<c<\gamma$.

A Lemma (1a) és (1b) szerint α-nak léteznek olyan $\dot U_1$ és $\dot U_2$ pontozott környezetei, amelyekre $\forall x\in(\dot U_1\cap A)\ f(x)<c$, illetve $\forall x\in(\dot U_2\cap A)\ f(x)>c$. Mivel az A halmaz torlódik az α halmazhoz, van olyan $x\in A$, mi mindkét pontozott környezetnek eleme. Erre viszont $f(x)<c$ és $f(x)>c$ egyszerre teljesül, ami ellentmondás.

14. Tétel.

(1) $\lim_{\alpha,A} f=\infty$ akkor és csak akkor, ha $\liminf_{\alpha,A} f=\infty$.

(2) $\lim_{\alpha,A} f=-\infty$ akkor és csak akkor, ha $\limsup_{\alpha,A} f=-\infty$.

(3) $\lim_{\alpha,A} f=b$ akkor és csak akkor, ha $\liminf_{\alpha,A} f=\limsup_{\alpha,A} f=b$.

(4) Akkor és csak akkor létezik $\lim_{\alpha,A} f$, ha $\liminf_{\alpha,A} f=\limsup_{\alpha,A} f$.

Biz. (1) Ha $\lim_{\alpha,A}=\infty$, akkor bármely P-hez han olyan $\dot U\subset\dot U_0$ pontozott környezete α-nak, amire $f(\dot U\cap A)\subset(P,\infty)$, azaz $inf f(\dot U\cap A)>P$. Ebből következik, hogy $\sup\{\inf f(\dot U\cap A)\}>P$ minden P-re.

Megfordítva, ha $\limsup_{\alpha,A} f=\infty$, akkor minden valós P-hez van olyan $\dot U$ pontozott környezet, amire $\inf f(\dot U\cap A)>P$. Ekkor viszont $f(\dot U\cap A)\subset(P,\infty)$.

(2) Ugyanígy.

(3) Ha $\lim_{\alpha,A} = b$, akkor bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\dot{U}$ pontozott környezete α, amire $f(\dot{U}) \subset (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$. Ezért

$$\liminf_{\alpha,A} f \geq \inf f(\dot{U} \cap A) \geq b - \varepsilon \quad \text{és} \quad \limsup_{\alpha,A} f \leq \sup f(\dot{U} \cap A) \leq b + \varepsilon$$

$$b - \varepsilon \leq \liminf_{\alpha,A} f \leq \limsup_{\alpha,A} f \geq b + \varepsilon.$$

Mivel ez bármely $\varepsilon > 0$-ra igaz, $\liminf_{\alpha,A} f = \limsup_{\alpha,A} f = b$.

Megfordítva, ha $\liminf_{\alpha,A} f = \limsup_{\alpha,A} f = b$, akkor bármely $\varepsilon > 0$-hoz léteztenek olyan $\dot{U}_1$ és $\dot{U}_2$ pontozott környezetek, amelyekre $f(\dot{U}_1 \cap A) \subset (b-\varepsilon, \infty)$ és $f(\dot{U}_2 \cap A) \subset (-\infty, b+\varepsilon)$. Az $\dot{U} = \dot{U}_1 \cap \dot{U}_2$ pontozott környezetre $f(\dot{U} \cap) \subset (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$. Tehát bármely ε-hoz található olyan $\dot{U}$ környezet, amire $f(\dot{U} \cap A) \subset B(b, \varepsilon)$, vagyis $\lim_{\alpha,A} f = b$.

(4) Következik (3)-ból. □

15. Tétel.

(a) Ha α torlódási pontja az $A \subset \mathbb{R}$ és $B \subset \mathbb{R}$ halmazoknak is, továbbá f olyan valós értékű függvény, ami értelmezett az α egy $\dot{U}_0$ pontozott környezete és $A \cup B$ közös részén, akkor

$$\limsup_{\alpha,A\cup B} f = \max\left(\limsup_{\alpha,A} f, \limsup_{\alpha,B} f\right) \quad \text{és} \quad \liminf_{\alpha,A\cup B} f = \min\left(\liminf_{\alpha,A} f, \liminf_{\alpha,B} f\right).$$

(b) Ha α torlódási pontja az $A \subset \mathbb{R}$ és $B \subset \mathbb{R}$ halmazoknak is, továbbá f olyan valós értékű függvény, ami értelmezett az α egy $\dot{U}_0$ pontozott környezete és $A \cup B$ közös részén, akkor

$$\lim_{\alpha,A\cup B} f = \beta \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\alpha,A} f = \lim_{\alpha,B} f = \beta.$$

(c) Ha az f valós értékű függvény értelmezett az a szám egy $\dot{U}_0$ pontozott környezetében, akkor

$$\lim_{a} f = \beta \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{a-0} f = \lim_{a+0} f = \beta;$$

Biz. (a) Csak a lim sup-ra vontakozó állítást igazoljuk, indirekt. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $\limsup_{\alpha,A} f \leq \limsup_{\alpha,B} f$, vagyis $\max\left(\limsup_{\alpha,A} f, \limsup_{\alpha,B} f\right) = \limsup_{\alpha,B} f$.

Ha $\limsup_{\alpha,A\cup B} f < \max\left(\limsup_{\alpha,A} f, \limsup_{\alpha,B} f\right)$, akkor van olyan b szám, amire

$$\limsup_{\alpha,A\cup B} f < b < \limsup_{\alpha,B} f.$$

Mivel $\limsup_{\alpha,A\cup B} f < b$, van olyan $\dot{U}$ pontozott környezet, hogy $\forall x \in \dot{U} \cap (A \cup B)\, f(x) < b$. Mivel pedig $b < \limsup_{\alpha,B} f$, van olyan $x \in \dot{U} \cap B$, amire $f(x) > b$. ez a kettő ellentmond egymásnak.

Megfordíva, ha $\limsup_{\alpha,A\cup B} f > \max\left(\limsup_{\alpha,A} f, \limsup_{\alpha,B} f\right)$, akkor van olyan b, amire

$$\limsup_{\alpha,A} f \leq \limsup_{\alpha,B} f < b < \limsup_{\alpha,A\cup B} f.$$

Ekkor vannak olyan $\dot{U}_1, \dot{U}_2$ pontozott környezetek, amikre $\forall x \in (\dot{U}_1 \cap A)\, f(x) < b$, illetve $\forall x \in (\dot{U}_2 \cap B)\, f(x) < b$. Legyen $\dot{U} = \dot{U}_1 \cap \dot{U}_2$. Mivel $b < \limsup_{\alpha,A\cup B} f$, van olyan $x \in \dot{U} \cap (A \cup B)$, amire $f(x) < b$. Ha $x \in A$, akkor $x \in \dot{U} \cap A \subset \dot{U}_1 \cap A$, tehát $f(x) > b$, ellentmondás. Hasonlóan, ha $x \in B$, akkor $x \in \dot{U} \cap B \subset \dot{U}_2 \cap B$, tehát $f(x) > b$, szintén ellentmondás.

(b) Ha $\lim_{\alpha,A\cup B} f = \beta$, akkor az (a) rész szerint

$$\beta = \lim_{\alpha,A\cup B} f = \liminf_{\alpha,A\cup B} f = \min\left(\liminf_{\alpha,A} f, \liminf_{\alpha,B} f\right) \leq$$

$$\leq \liminf_{\alpha,A} f, \liminf_{\alpha,B} f \leq \limsup_{\alpha,A} f, \limsup_{\alpha,B} f \leq$$

$$\leq \max\left(\liminf_{\alpha,A} f, \liminf_{\alpha,B} f\right) = \limsup_{\alpha,A\cup B} f = \lim_{\alpha,A\cup B} f = \beta,$$

ami csak úgy lehetséges, ha $\liminf_{\alpha,A} f = \liminf_{\alpha,B} f = \limsup_{\alpha,A} f = \limsup_{\alpha,B} f = \beta$, vagyis ha $\lim_{\alpha,A} f = \lim_{\alpha,B} f = \beta$.

Megfordítva, ha $\lim_{\alpha,A} f = \lim_{\alpha,B} f = \beta$, akkor, szintén az (a) rész szerint,

$$\liminf_{\alpha,A\cup B} f = \min\left(\liminf_{\alpha,A} f, \liminf_{\alpha,B} f\right) = \min\left(\lim_{\alpha,A} f, \lim_{\alpha,B} f\right) = \beta,$$

és

$$\limsup_{\alpha,A\cup B} f = \max\left(\limsup_{\alpha,A} f, \limsup_{\alpha,B} f\right) = \max\left(\lim_{\alpha,A} f, \lim_{\alpha,B} f\right) = \beta.$$

(c) Ez az állítás speciális esete a (b) állításnak, ha A, B halmazokat az a szám jobboldali, illetve baloldali környezeteinek választjuk. □

3.3. Határérték és egyenlőtlenségek

A határátmenet és különböző változatait függvényekre is kimondatjuk. A bizonyítások egyszerűen átíthatók.

16. Tétel. *(1) Ha valamilyen $\dot{U}$ pontozott környezet és A metszetén $f \le g$, akkor* $\limsup_{\alpha,A} f \le \limsup_{\alpha,A} g$ *és* $\liminf_{\alpha,A} f \le \liminf_{\alpha,A} g$.

(2) Ha $\limsup_{\alpha,A} f < \liminf_{\alpha,A} g$, *akkor egy pontozott környezet és A közös részében $f < g$.*

Biz. (1) A 3. lemma (2a) szerint létezik olyan (x_n) sorozat, amire $x_n \in A$, $x_n \ne a$, $x_n \to \alpha$ és $f(x_n) \to \limsup_{\alpha,A} f$. Erre a sorozatra 3 lemma (1) szerint

$$\limsup_{\alpha,A} f = \lim f(x_n) = \limsup f(x_n) \le \limsup g(x_n) \le \limsup_{\alpha,A} g.$$

(2) Válasszunk egy olyan b számot, amire $\limsup_{\alpha,A} f < b < \liminf_{\alpha,A} g$. Ekkor vannak olyan $\dot{U}_1, \dot{U}_2$ pontozott környezetek, amikre $\forall x \in (\dot{U}_1 \cap A)\ f(x) < b$, illetve $\forall x \in (\dot{U}_2 \cap A)\ g(x) > b$. Legyen $\dot{U} = \dot{U}_1 \cap \dot{U}_2$, erre a pontozott környezetre $\forall x \in (\dot{U} \cap A)\ f(x) < b < g(x)$,

4. Következmény. *(1) Ha valamilyen $\dot{U}$ pontozott környezet és A metszetén $f \le g$, továbbá* $\lim_{\alpha,A} f$ *és* $\lim_{\alpha,A} g$ *létezik, akkor* $\lim_{\alpha,A} f \le \lim_{\alpha,A} g$. *(Határátmenet)*

(2) Ha $\lim_{\alpha,A} f < \lim_{\alpha,A} g$, *akkor egy pontozott környezet és A közös részében $f < g$.*

17. Tétel (Tétel (rendőr-elv)). *(1) Ha valamilyen $\dot{U}$ pontozott környezet és A metszetén $f \le g \le h$, továbbá* $\liminf_{\alpha,A} f = \limsup_{\alpha,A} h = b$, *akkor* $\lim_{\alpha,A} g = b$.

(2) Ha valamilyen $\dot{U}$ pontozott környezet és A metszetén $f \le g \le h$, továbbá $\lim_{\alpha,A} f = \lim_{\alpha,A} h = b$, *akkor* $\lim_{\alpha,A} g = b$.

(3) Ha valamilyen $\dot{U}$ pontozott környezet és A metszetén $|f| \le g$, továbbá $\lim_{\alpha,A} g = 0$, *akkor* $\lim_{\alpha,A} f = 0$.

(4) Ha az a szám valamilyen U pontozott környezete és az $A \ni a$ halmaz metszetén $f \le g \le h$, $f(a) = g(a) = h(a)$ továbbá f és h folytonos a-ban az A halmazra szorítkozva, akkor a g függvény is folytonos a-ban az A halmazra szorítkozva.

Biz. (1–3): A sorozatokra vonatkozó rendőr-elv bizonyítását egy az egyben átírhatjuk.

(4) Ha a izolált pont, akkor az álítás triviális, mert minden függvény folytonos a-ban. Ha a torlódási pont, és az (1) állításban b helyére a $g(a)$ számot írjuk, azt kapjuk, hogy $\lim_{\alpha,A} g = g(a)$, ami ekvivalens a folytonossággal.

18. Tétel (végtelen rendőr-elv, honvéd-elv). *(1) Ha valamilyen $\dot{U}$ pontozott környezet és A metszetén $f \le g$, továbbá* $\lim_{\alpha,A} f = \infty$, *akkor* $\lim_{\alpha,A} g = \infty$.

(2) Ha valamilyen $\dot{U}$ pontozott környezet és A metszetén $f \le g$, továbbá $\lim_{\alpha,A} g = -\infty$, *akkor* $\lim_{\alpha,A} f = -\infty$.

Biz. A sorozatokra vonatkozó rendőr-elv bizonyítását egy az egyben átírhatjuk.

3.4. A függvényhatárértékre vonatkozó Cauchy-kritérium

19. Tétel (Cauchy-kritérium). *Legyen $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ torlódási pontja az A halmaznak, $\dot{U}_0$ pontozott környezete α-nak, továbbá f olyan valós értékű függvény, amire $\dot{U}_0 \cap A \subset D(f)$.*

Az f függvénynek akkor és csak akkor létezik véges határértéke az α pontban az A halmazra szorítkozva, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \dot{U} \subset \dot{U}_0 \quad \forall x, y \in (\dot{U} \cap A) \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Biz. ($\Rightarrow$) Legyen $b = \lim_{\alpha,A} f$. A határérték definíciója szerint

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \dot{U} \subset \dot{U}_0 \quad \forall x \in (\dot{U} \cap A) \quad |f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ezért

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \dot{U} \subset \dot{U}_0 \quad \forall x, y \in (\dot{U} \cap A) \quad |f(x) - f(y)| \le |f(x) - b| + |b - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Vegyünk egy tetszőleges pozitív ε-t, és az ehhez tartozó $\dot{U}$ pontozott környezetet. Ezután pedig válasszunk és rögzítsünk ki egy $y \in (\dot{U} \cap A)$ számot. A kritérium szerint

$$\forall x \in (\dot{U} \cap A) \quad f(y) - \varepsilon < f(x) < f(y) + \varepsilon$$
$$f(y) - \varepsilon \le \liminf_{\alpha,A} f \le \limsup_{\alpha,A} f \le f(y) + \varepsilon.$$

Az utóbbi egyenlőtlenségből láthatnuk, hogy $\liminf_{\alpha,A} f$ és $\limsup_{\alpha,A} f$ is véges, továbbá

$$0 \le \limsup_{\alpha,A} f - \liminf_{\alpha,A} f \le (f(y) + \varepsilon) - (f(y) - \varepsilon) = 2\varepsilon.$$

Tehát, $\liminf_{\alpha,A} f$ és $\limsup_{\alpha,A} f$ véges, a különbségük pedig bármilyen pozitív számnál kisebb. Vagyis $\liminf_{\alpha,A} f = \limsup_{\alpha,A} f$, a határérték létezik és véges. $\square$

3.5. Az átviteli elv

3. Lemma.

(1) Tetszőleges olyan (x_n) sorozatra, amire $x_n \in A$, $x_n \neq \alpha$ és $x_n \to \alpha$, teljesül, hogy

$$\liminf_{\alpha,A} f \le \liminf f(x_n) \le \limsup f(x_n) \le \limsup_{\alpha,A} f.$$

(2a) Létezik olyan (x_n) sorozat, amire $x_n \in A$, $x_n \neq \alpha$, $x_n \to \alpha$ és $f(x_n) \to \limsup_{\alpha,A} f$.

(2b) Létezik olyan (y_n) sorozat, amire $y_n \in A$, $y_n \neq \alpha$, $y_n \to \alpha$ és $f(y_n) \to \liminf_{\alpha,A} f$.

(2c) Létezik olyan (z_n) sorozat, amire $z_n \in A$, $z_n \neq \alpha$, $z_n \to \alpha$, $\liminf f(z_n) = \liminf_{\alpha,A} f$ és $\limsup f(z_n) = \limsup f_{\alpha,A} f$.

Biz. (1) Csak az $\limsup f(x_n) \le \limsup_{\alpha,A} f$ egyenlőséget igazoljuk. A liminf-re vonatkozó egyenlőtlenség ugyanúgy megy, a középsőt pedig már bebizonyítottuk.

Tegyük fel indirekten, hogy $\limsup f(x_n) > \limsup_{\alpha,A} f$; ekkor választhatunk egy olyan b valós számot, amire

$$\limsup_{\alpha,A} f < b < \limsup f(x_n).$$

A 2. lemma szerint az α-nak van olyan $\dot{U}$ pontozott környezete, amire $f(\dot{U})$ minden eleme kisebb, mint b. Mivel $x_n \to \alpha$, miközben $x_n \neq \alpha$, ebből következik, hogy véges sok kivétellel $x_n \in \dot{U}$, ezért az is igaz, hogy véges sok kivétellel $f(x_n) < b$. Ez viszont ellentmond annak, hogy $\limsup f(x_n) > b$.

(2a) Legyen $\beta = \limsup_{\alpha,A} f$. Definiáljuk α és β környezeteinek egy-egy U_n, illetve $V_n = (\gamma_n, \delta_n)$ $(n = 1, 2, \dots)$ sorozatát a következőképpen: tetszőleges n pozitív egészre legyen

$$U_n = \begin{cases} B(\alpha, \frac{1}{n}) & \text{ha } \alpha \text{ véges,} \\ (n, \infty) & \text{ha } \alpha = \infty, \\ (-\infty, -n) & \text{ha } \alpha = -\infty; \end{cases} \qquad V_n = \begin{cases} B(\beta, \frac{1}{n}) & \text{ha } \beta \text{ véges,} \\ (n, \infty) & \text{ha } \beta = \infty, \\ (-\infty, -n) & \text{ha } \beta = -\infty. \end{cases}$$

Tetszőleges n-re a 2. lemma (1a) miatt van α-nak olyan $\dot{W}_n$ pontozott környezete, amire bármely $x \in (\dot{W}_n \cap A)$-ra $f(x) < \delta_n$. A lemma (2a) miatt pedig választhatunk olyan olyan $x_n \in (U_n \cap \dot{W}_n \cap A)$ elemet, amire $f(x_n) > \gamma_n$. Erre az elemre tehát $f(x_n) \in V_n$.

Mivel $x_n \in (\dot{W}_n \cap A)$, igaz, hogy $x \in A$ és $x_n \neq \alpha$.

Mivel $x_n \in U_n$, teljesül, hogy $x_n \to \alpha$.

Mivel pedig $f(x_n) \in V_n$, az is igaz, hogy $f(x_n) \to \beta$. $\square$

(2b) Ugyanúgy, mint (2a).

(2c) Vegyünk egy-egy olyan sorozatot, amit a (2a) és a (2b) biztosít, és fésüljük össze őket. Az összefésült sorozatnak $\liminf_{\alpha,A} f$ és $\limsup_{\alpha,A} f$ is torlódási pontja; az (1) miatt viszont nincs ezeknél nagyobb, illetve kisebb torlódási pont.

20. Tétel (a határértékre vonatkozó átviteli elv). *Legyen $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, és $A \subset \mathbb{R}$ olyan számhalmaz, amelynek α torlódási pontja. Legyen továbbá f olyan függvény, ami értelmes az $A \cap \dot{U}_0$ halmaz pontjaiban, ahol $\dot{U}_0$ az α egy pontozott környezete.*

Akkor és csak akkor teljesül $\lim_{\alpha,A} f = \beta$, ha valahányszor egy (x_n) sorozatra $\{x_n\} \subset (\dot{U}_0 \cap A)$ és $x_n \to \alpha$, akkor $f(x_n) \to \beta$.

Biz. $\Rightarrow$ Ha $\{x_n\} \subset (\dot{U}_0 \cap A)$ és $x_n \to \alpha$, akkor $f(x_n) \to \beta$, akkor a 3. lemma (1) miatt

$$\beta = \lim_{\alpha,A} f = \liminf_{\alpha,A} f \leq \liminf f(x_n) \leq \limsup f(x_n) \leq \limsup_{\alpha,A} f = \lim_{\alpha,A} f = \beta,$$

tehát

$$\liminf f(x_n) = \limsup f(x_n) = \beta.$$

$\Leftarrow$ Legyen (x_n) olyan sorozat, amelyre $\{x_n\} \subset (\dot{U}_0 \cap A)$, $x_n \to \alpha$, $\liminf f(x_n) = \liminf_{\alpha,A} f$ és $\limsup f(x_n) = \limsup f_{\alpha,A} f$. Ilyen a 3. Lemma (2c) szerint létezik. A feltétel miatt azonban az is igaz, hogy $f(x_n) \to \beta$, e háromból együtt pedig következik, hogy $\liminf_{\alpha,A} f = \limsup_{\alpha,A} f = \beta$. $\square$

21. Tétel (a folytonosságra vonatkozó átviteli elv). *Legyen a valós szám, és $A \subset \mathbb{R}$ olyan számhalmaz, amelynek a eleme. Legyen továbbá f olyan függvény, ami értelmes az $A \cap U_0$ halmaz pontjaiban, ahol U_0 az a egy környezete.*

Az f függvény akkor és csak akkor folytonos az a pontban az A halmazra szorítkozva, ha valahányszor egy (x_n) sorozatra $\{x_n\} \subset (U_0 \cap A)$ és $x_n \to a$, akkor $f(x_n) \to f(a)$.

Biz. $\Rightarrow$ Legyen $b = f(a)$, és tekintsünk egy tetszőleges, a-hoz tartó (x_n) sorozatot az A halmazban.

A folytonosság miatt tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik egy olyan δ, amire $f(B(a, \delta) \cap A) \subset B(b, \varepsilon)$. Mivel $x_n \to a$, elég nagy n-re $x_n \in (B(a, \delta) \cap A)$, ezért $f(x_n) \in B(b, \varepsilon)$. Tehát $f(x_n) \to b$.

$\Leftarrow$ Ha a izolált pontja A-nak, akkor az állítás triviális. Ha a torlódási pont, akkor a határértékre vonatkozó átviteli elv miatt $\lim_{a,A} f = f(a)$, tehát f folytonos a-ban az A halmazra szorítkozva. $\square$

4. Kompakt halmazon folytonos függvények

5. Definíció. *(a) A $H \subset \mathbb{R}$ halmaznak az $a \in \mathbb{R}$ szám „belső pontja”, ha van olyan $r > 0$, amire $B(a, r) \subset H$. A H belső pontjainak halmazát a H belsejének nevezzük, és* $\operatorname{int} H$*-val jelöljük.*

(b) A $H \subset \mathbb{R}$ halmaznak az $a \in \mathbb{R}$ szám „külső pontja”, ha van olyan $r > 0$, amire $B(a, r) \cap H = \emptyset$. A H külső pontjainak halmazát a H külsejének nevezzük, és $\operatorname{ext} H$*-val jelöljük.*

(c) A $H \subset \mathbb{R}$ halmaznak az $a \in \mathbb{R}$ szám „határpontja”, ha sem belső, sem határpont. Más szóval, minden $r > 0$-ra a $B(a, r)$ környezet tartalmaz H-ból és $(\mathbb{R} \setminus H)$-ból is elemet. A határpontok halmazát a H határának nevezzük, és ∂H-val jelöljük.

Tetszőleges H halmaz három, páronként diszjunkt részre bontja a számegyenest: H belsejére, külsejére és határára.

6. Definíció. *(a) A $H \subset \mathbb{R}$ halmaz nyílt, ha minden eleme belső pont, azaz $H \subset \operatorname{int} H$; más szóval, ha diszjunkt a határával.*

(b) A $H \subset \mathbb{R}$ halmaz zárt, ha tartalmazza a határát, azaz a komplementuma minden eleme külső pont.

22. Tétel. *Tetszőleges H halmazra teljesülnek a következők:*

(a) $\operatorname{int}(\operatorname{int} H) = \operatorname{int} H$*, azaz* $\operatorname{int} H$ *nyílt.*

(b) $\operatorname{int}(\operatorname{ext} H) = \operatorname{ext} H$*;*

(c) $\operatorname{int} H$ *és* $\operatorname{ext} H$ *nyílt, ∂H zárt.*

Biz. ...

23. Tétel. *Egy $H \subset \mathbb{R}$ halmaz akkor és csak akkor zárt, ha minden véges torlódási pontja eleme.*

Biz. ...

24. Tétel (Borel fedési tétele). *Ha G_α $(\alpha \in A)$ nyílt halmazok egy rendszere, és $[a, b] \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$, akkor van olyan véges $B \subset A$ halmaz, amire $[a, b] \subset \bigcup_{\alpha \in B} G_\alpha$. Más szóval, $[a, b]$ minden nyílt fedése tartalmaz véges részfedést.*

Biz. Nevezzünk egy $c \in [a, b]$ számot jónak, ha az $[a, b]$ intervallumot lefedi véges sok G_α uniója. Az a pontot valamelyik halmaz fedi, ezért az a szám biztosan jó. A jó számok halmaza nem üres (egy eleme a) és felső korlátos (pl. a b felső korlát). Legyen d a jó számok szuprémuma; ekkor $d \in [a, b]$.

A d számot lefedi valamelyik G_{α_0} halmaz, Mivel G_{α_0} nyílt, tartalmazza d egy környezetét is: $B(d, \varepsilon) \subset G_{\alpha_0}$ valamilyen $\varepsilon > 0$-ra.

Mivel d a jó számok szuprémuma, a $B(d, \varepsilon) \cap [a, d]$ intervallum tartalmaz legalább egy jó számot; legyen ez g. Ekkor $[a, g]$-t lefedi valamilyen $G_{\alpha_1}, \ldots, G_{\alpha_n}$ véges rendszer. Ha ehhez hozzávesszük a G_{α_0} halmazt is, ez az $n + 1$ halmaz együtt lefedi az $[a, d + \varepsilon)$ és vele együtt az $[a, d]$ intervallumot is.

Ebből következik, hogy d is jó szám, sőt $[d, d + \varepsilon) \cap [a, b]$ minden eleme jó. Viszont nincs d-nél nagyobb jó szám, ami csak úgy lehetséges, ha $d = b$.

Tehát $b = d$ jó szám. $\square$

7. Definíció. *Egy $K \subset \mathbb{R}$ halmaz kompakt, ha K minden nyílt fedése tartalmaz véges részfedést. Ezzel a definícióval Borel fedési tétele azt mondja, hogy minden korlátos, zárt intervallum kompakt.*

25. Tétel. *Egy $K \subset \mathbb{R}$ halmaz akkor és csak akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

Biz. ($\Rightarrow$) Tegyük fel, hogy $K \subset \mathbb{R}$ kompakt.

Először azt igazoljuk, hogy K kolrátos. Az $(-a, a)$ alakú intervallumok ($a > 0$) lefedik K-t, ezért ezek közül véges sok is lefedi, ezek között pedig van egy legbővebb. Tehát valamelyik $(-a, a)$ tartalmazza K-t, így K-nak a felső, $-a$ pedig alsó korlátja.

Most azt igazoljuk, hogy K zárt, azaz a komplementuma nyílt, azaz $\mathbb{R} \setminus K$ minden eleme külső pontja K-nak. Vegyünk egy tetszőleges $p \in \mathbb{R} \setminus K$ pontot. Azt akarjuk megmutatni, hogy p külső pont.

Legyen minden $r > 0$ esetén $G_r = \mathbb{R} \setminus \overline{B}(p, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - p| > r\}$. Ez nyílt halmaz, és az összes ilyen halmaz együtt lefed minden p-től különböző pontot. Mivel K kompakt, véges sok ilyen G_r is lefedi K-t, ezek közül a legbővebb egymaga is lefedi. Tehát van egy olyan r, amire $K \subset G_r$. Ekkor viszont $B(p, r)$ diszjunkt K-val, következésképp p külső pont.

($\Leftarrow$) Most tegyük fel, hogy K korlátos és zárt. Azt igazoljuk, hogy K kompakt. A Borel fedési tételből már tudjuk, hogy a korlátos zárt intervallumok kompaktak.

Legyen $[a, b]$ egy korlátos zárt intervallum, ami tartalmazza K-t.

Legyen G_α ($\alpha \in A$) a K halmaz egy tetszőleges nyílt fedése. Vegyük hozzá a fedéshez az $\mathbb{R} \setminus K$ nyílt halmazt. Így egy olyan rendszert kapunk, ami a teljes számegyenest fedi. A Borel tétel szerint ennek egy véges része is fedi $[a, b]$-t: létezik olyan $B \subset A$ véges halmaz, amire $[a, b] \subset \left(\bigcup_{\alpha \in B} G_\alpha \cup (\mathbb{R} \setminus K) \right)$. Ekkor

$$K = [a, b] \cap K \subset \left(\bigcup_{\alpha \in B} G_\alpha \cup (\mathbb{R} \setminus K) \right) \cap K \subset \bigcup_{\alpha \in B} G_\alpha.$$

Ezzel K tetszőleges nyílt fedéséből kiválasztottunk véges részfedést, tehát K valóban kompakt. $\square$

26. Tétel (Weierstrass). *Minden kompakt, nem üres halmazon folytonos függvénynek van legnagyobb és legkisebb értéke.*

Biz. Indirekt. Legyen $M = \sup_K f$, és tegyük fel, hogy f nem veszi fel az M értéket.

Tetszőleges $a \in K$ pontra $f(a) < M$, tehát választhatunk olyan $m(a)$ számot, amire $f(a) < m(a) < M$. Mivel f folytonos az a pontban a K halmazra szorítkozva, van olyan $\delta(a) > 0$, hogy minden $x \in \big(B(a, \delta(a)) \cap K\big)$ esetén $f(x) < m(a)$.

A $B(a, \delta(a))$ halmazok nyíltak, és lefedik K-t. Mivel K kompakt, a fedésből kiválasztható egy véges részfedés, azaz vannak olyan $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ elemek, amikre $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \delta(a_i))$. Az n szám bármilyen nagy lehet, de véges. Továbbá, mivel K nem üres, $n \geq 1$.

Minden $x \in K$ pontot lefed valamelyik $B(a_i, \delta(a_i))$. Erre az i indexre

$$f(x) < m(a_i) \leq \max\big(m(a_1), m(a_2), \ldots, m(a_n)\big) < M.$$

Ekkor azonban $\max\big(m(a_1), \ldots, m(a_n)\big)$ egy felső korlátja az f függvénynek, ami ellentmond annak, hogy M a legkisebb felső korlát. $\square$

5. Megszámlálható halmazok

A tankönyvön kívül két fontos halmazelméleti tételt tanultunk. Ezek bizonyítását ugyan nem kérem számon a vizsgán, de azért érdemes ismerni.

27. Tétel (Cantor-Schöder-Bernstein). *Ha A, B halmazok, és léteznek $f : A \to B$ és $g : B \to A$ injekciók, akkor létezik $A \to B$ bijekció is.*

Biz. A két halmazt fel fogjuk bontani két-két diszjunkt részre: $A = A_1 \cup A_2$, $B = B_1 \cup B_2$ úgy, hogy $f(A_1) = B_1$ és $g(B_2) = A_2$. Ezzel $(f|A_1) \cup (g|B_2)^{-1}$ egy $A \to B$ bijekció lesz.

Legyen minden $X \subset A$-ra $h(X) = A \setminus \big(B \setminus f(X)\big)$. Olyan A_1 halmazt keresünk, amire $h(A_1) = A_1$.

A h leképezés rendezéstartó: $X \subset Y \subset A$ esetén $h(X) \subset h(Y)$.

Nevezzünk egy $X \subset A$ hamazt „kicsinek”, ha $X \subset h(X)$; pl. az üres halmaz kicsi. Legyen $K = \{X \subset A : X \subset h(X)\}$ a kicsi részalmazok halmaza. Legyen A_1 a kicsi halmazok uniója: $A_1 = \bigcup\limits_{X \in K} X$. Erre a halmazra $h(A_1) = h\Big(\bigcup\limits_{X \in K} X\Big) \supset \bigcup\limits_{X \in K} h(X) \supset \bigcup\limits_{X \in K} X = A_1$, tehát A_1 maga is kicsi; A_1 a legbővebb kicsi halmaz.

A rendezéstartóság miatt $A_1 \subset h(A_1)$-ből következik, hogy $h(A_1) \subset h(h(A_1))$. Tehát a $h(A_1)$ halmaz is kicsi. Mivel minden kicsi halmaz részhalmaza A_1-nek, tehát $h(A_1) \subset A_1$. Ezzel bebizonyítottuk, hogy $h(A_1) = A_1$.

(A bizonyítás a legnagyobb fixpontot konstruálja meg. Hasonlóan, a „nagy” halmazok metszeteként kapjuk a legkisebb fix pontot. Vö. a Tarski-Knaster fixponttétellel)

28. Tétel. *Tetszőleges H halmazra $|P(H)| > |H|$.*

Biz. (átlós módszer) Létezik $H \to P(H)$ injekció, pl. $x \mapsto \{x\}$. Tehát $|P(H)| \geq |H|$.

Tetszőleges $f : H \to P(H)$ függvényre $H = \{x \in H : x \notin f(x)\}$ nincs benne f képhalmazában, mert ha valamely $x_0 \in H$-ra $f(x_0) = H$ lenne, akkor $x_0 \in H \Leftrightarrow x_0 \notin f(x_0) \Leftrightarrow x_0 \notin H$ lenne, ami ellentmondás. Tehát nem létezik szürjektív $H \to P(H)$ leképezés.

6. Trigonometrikus és hiperbolikus azonosságok

6.1. Trigonometrikus azonosságok

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1; \quad \sin(k\pi) = 0; \quad \cos(k\pi) = (-1)^k; \quad \sin(k\pi + \frac{\pi}{2}) = (-1)^k; \quad \cos(k\pi + \frac{\pi}{2}) = 0;$$

$$\cos(x+\pi) = -\cos x; \quad \sin(x+\pi) = -\sin x; \quad \cos(x+2\pi) = \cos x; \quad \sin(x+2\pi) = \sin x;$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x; \quad \sin(\pi - x) = \sin x; \quad \cos(-x) = \cos x; \quad \sin(-x) = -\sin x;$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x; \quad \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x; \quad \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x; \quad \cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x;$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y; \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y;$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y; \quad \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y;$$

$$\sin 2x = 2 \cos x \sin x; \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x;$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}; \quad \operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}; \quad \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{ctg}(x+y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y}; \quad \operatorname{ctg}(x-y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y + 1}{\operatorname{ctg} y - \operatorname{ctg} x}; \quad \operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x}$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}; \quad \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}; \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

$$\cos x \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$$

$$\sin x \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$$

$$\sin x \cos y = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}; \quad \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}; \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

6.2. Hiperbolikus trigonometrikus azonosságok

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}; \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}$$

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y; \quad \operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y;$$

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y; \quad \operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y;$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x; \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2\operatorname{ch}^2 x - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x;$$

$$\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}; \quad \operatorname{th}(x-y) = \frac{\operatorname{th} x - \operatorname{th} y}{1 - \operatorname{th} x \operatorname{th} y}; \quad \operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}$$

$$\operatorname{cth}(x+y) = \frac{1 + \operatorname{cth} x \operatorname{cth} y}{\operatorname{cth} x + \operatorname{cth} y}; \quad \operatorname{cth}(x-y) = \frac{1 - \operatorname{cth} x \operatorname{cth} y}{\operatorname{cth} x - \operatorname{cth} y}; \quad \operatorname{cth} 2x = \frac{\operatorname{cth}^2 x + 1}{2 \operatorname{cth} x}$$

$$\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}; \quad \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}; \quad \operatorname{th} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + 1} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x}; \quad \operatorname{cth} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x + 1}{\operatorname{sh} x} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1}$$

$$\operatorname{ar\,sh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right); \quad \operatorname{ar\,ch} x = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right);$$

$$\operatorname{ar\,th} x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}; \quad \operatorname{ar\,cth} x = \frac{1}{2} \log \frac{1-x}{1+x}$$

$$\vdots$$