# Tájékoztató és részletes tételjegyzék az analízis vizsgához (sillabusz)

2010/2011, I. félév

Matematika BSC, I. évfolyam, intenzív szint

A vizsga három részből áll.

- Beugró feladat: olyan feladat, amelynek megoldása mindenképpen elvárható, ha valaki megértette a tananyagot.
- A tételjegyzék két tételének vázlatos kidolgozása és szóbeli előadása.
- Válaszadás a vizsgáztató szóbeli kérdéseire.

Az elégséges osztályzathoz meg kell tudni oldani a beugró feladatot és legalább ki kell tudni mondani a tananyagban szereplő tételeket.

A vizsgán a tételjegyzéket használhatjátok, a sillabuszt nem. Íróeszközökön kívül más segédeszköz (pl. számológép) nem használható.

Ez a tájékoztató letölthető innen:
`http://www.cs.elte.hu/~kosgeza/oktatas/2010osz-an1/sillabusz.pdf`

A tételjegyzék pedig innen:
`http://www.cs.elte.hu/~kosgeza/oktatas/2010osz-an1/teteljegyzek.pdf`

## Részletes tételjegyzék

### 1. Logikai alapfogalmak és bizonyítási módszerek

Logikai műveletek, kvantorok. Indirekt bizonyítás. A $\sqrt{2}$ irracionális. Teljes indukció. Bernoulli-egyenlőtlenség. AM-GM egyenlőtlenség. HM-GM egyenlőtlenség. (TK 15–24)

### 2. Halmazelméleti alapfogalmak

Halmaz, elem, részhalmaz. Halmazok megadása. Műveletek. Új halmaz képzésének szabályai (egy halmaz bizonyos tulajdonságú elemei, halmaznak operáció szerinti képe, hatványhalmaz, végtelen halmaz.) Pár. Descartes-szorzat. Kétváltozós relációk. Függvények. Sorozatok. (TK 26–31)

### 3. A valós számok axiómái I.

Konstruktív és axiomatikus felépítések. A testaxiómák és következményeik. A rendezési axiómák és következményeik. A 0 és az 1 egyértelmű, és $(ab = 0) \Leftrightarrow (a = 0 \wedge b = 0)$. Abszolút érték. Háromszög-egyenlőtlenség. (TK 32–36; 57–59)

### 4. A valós számok axiómái II.

Az Arkhimédészi axióma. A Cantor-axióma. $\mathbb{Q}$ sűrű. A $k$-adik gyök létezése. (TK 36–41)

### 5. Tizedestörtek

A tizedestört alak létezése. Egy-, illetve kétértelműség. Az irracionális számok halmaz sűrű. Azok a testek, amikben teljesül a 15 axióma, izomorfak. A számegyenes. Intervallumok fajtái. Minden intervallum konvex. (TK 42–47)

## 6. Korlátos számhalmazok

Felülről és alulról korlátos halmaz. A legkisebb felő korlát tétele. Legnagyobb alsó korlát. Halmazok szuprémuma és infimuma. (Az üres halmazé is.) Komplexusösszeg szuprémuma és infimuma. Minden konvex halmaz intervallum. A $k$-adik gyök létezésének bizonyítása legkisebb felső korláttal. (TK 48–52)

## 7. Hatványozás

Haatványozás pozitív egész, egész, racionális és valós kitevőre. A hatványozás azonosságai. (Bizonyítás csak racionális kitevőkre.) Monotonitás. (TK 53–56).

## 8. Sorozatok határértéke

Sorozatok megadása. Alulról és felülről korlátos sorozatok. Véges és végtelen határértékek. Egységes definíció környezetekkel. Konvergens, divergens és "oszcillálva" divergens sorozatok. Határérték és korlátosság kapcsolata. A határérték egyértelmű. Az $n^p$, $\sqrt[p]{n}$, $a^n$, $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{n}$ sorozatok határértéke. (TK 60–73).

## 9. A határérték alaptulajdonságai. Monoton sorozatok

Részsorozatok viselkedése. A konvergenciaviselkedés nem változik, ha a sorozatot átrendezzük, az elemeket véges sokszor megismételjük, a sorozathoz véges sok tagot hozzáveszünk vagy elhagyunk. Monoton sorozat határértéke. Az $e$ szám. (TK 74–76; 90–94)

## 10. Sorozatok határértéke és műveletek

Az összegsorozat határértéke. Kritikus határértékek. Korlátos és 0-hoz tartó sorozat szorzatának határértéke. Szorzatsorozat határértéke. Reciprok sorozat és hányadossorozat határértéke. Nem 0 számhoz tartó és 0-hoz tartó sorozat hányadosának határértéke. (TK 79–85).

## 11. Sorozatok limesz szuperiora és limesz inferiora; határérték és egyenlőtlenségek

Torlódási pont. Számsorozat limesz szuperiora és limesz inferiora. Kapcsolat a $\inf\sup$ és $\limsup$, illetve $\sup\inf$ és $\liminf$ között. A $\limsup$, illetve $\liminf$ a legnagyobb, illetve legkisebb torlódási pont. A véges és végtelen határértékek jellemzése $\liminf$-fel és $\limsup$-pal. Határátmenet. A rendőr-elv és változatai. (Jegyzet 1, TK 77–79).

## 12. Végtelenhez és nullához tartó sorozatok nagyságrendje

Két polinom hányadosának határértéke. Ha $\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, akor $a_n \to 0$. az $\frac{a^n}{n^p}$ és az $\frac{a^n}{n!}$ határérték. Végtelenhez tartó sorozatok nagyságrendje. Ekvivalencia, részbenrendezés és aszimptotikus egyenlőség. Stirling-formula (bizonyítás nélkül). (TK 86–89).

## 13. Korlátos sorozatok

Monoton részsorozat létezése. Bolzano-Weierstrass tétel (két bizonyítás). Cauchy-kritérium (az elégségességre két bizonyítás). A valós számok konstruktív felépítése Cauchy-sorozatok ekvivalencia-osztályaival. (TK 91–100, Jegyzet 2).

## 14. Megszámlálható és nem megszámlálható halmazok

Megszámlálható halmaz. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ megszámlálható. Megszámlálható halmaz része és megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója megszámlálható. A pozitív egészekből álló véges sorozatok halmaza megszámlálható. $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_k]$ és az algebrai számok halmaza megszámlálható. A $[0, 1)$ nem megszámlálható (2 bizonyítás). Injektív, szürjektív és bijektív függvények. Halmazok számosságának összehasonlítása. Cantor-Schröder-Bernstein tétel (bizonyítás nélkül). Kontinuum. Egy végtelen és egy megszámlálható halmaz uniójának számossága. Az irracionális számok, transzcendens számok, nem elfajuló intervallumok, valamint $P(\mathbb{N})$ számossága kontinuum. Bármely $H$ halmazra $|H| < |P(H)|$ (bizonyítás nélkül). Nincs legnagyobb számosság. (TK 102–106, Jegyzet 5.)

## 15. Valós függvények alaptulajdonságai

Függvények. Értelmezési tartomány, képhalmaz, értékkészlet, injektív, szürjektív, bijektív függvény, inverz, kompozíció, grafikon, műveletek. Páros, páratlan és periodikus függvények, alulról és felülről korlátos függvény, (szigorúan) monoton növő és csökkenő, illetve konvex és konkáv függvények. Ekvivalens feltételek a konvexitásra. Jensen-egyenlőtlenség. $x^2$ $\mathbb{R}$-en és $1/x$ $(0,\infty)$-en szigorúan konvex. (TK 108–109; TK 114–120)

## 16. Valós függvények folytonossága és határértéke

Folytonosság és féloldali folytonosság. Példák. Környezetek és féloldali környezetek. Véges határérték véges helyen. Határérték és folytonosság kapcsolata. A véges határérték egyértelmű. A 15-féle határérték. Pontozott környezetek. A határérték egységes definíciója környezetekkel. Halmaz torlódási pontja. Függvény folytonossága, határértéke valamilyen halmazra szorítkozva. (TK 124–136; TK 142–143)

## 17. Valós függvények limesz inferiora és limesz szuperiora

Függvények limesz szuprémuma és limesz inferiora valamilyen halmazra szorítkozva. A definíció nem függ a kiindulási környezet méretétől.

$\limsup(-f) = -\liminf f$. Ha egy környezetben $f \leq b$, akkor $\limsup f \leq b$. Ha $b > \limsup_\alpha f$, akkor létezik $\alpha$-nak olyan $\dot{U}$ pontozott környezete, hogy $\forall x \in \dot{U}\ f(x) < b$. Ha $b < \limsup_\alpha f$, akkor $\alpha$-nak minden $\dot{U}$ pontozott környezetében $\exists x \in \dot{U}\ f(x) > b$. $\liminf \leq \limsup$.

$\lim = \infty$ akkor és csak akkor, ha $\liminf = \infty$. $\lim = -\infty$ akkor és csak akkor, ha $\limsup = -\infty$. $\lim = b$ akkor és csak akkor, ha $\liminf = \limsup = b$. Akkor és csak akkor létezik lim, ha $\liminf = \limsup$. A hatérérték egyértelmű.

Kapcsolat $\lim_{\alpha,A\cup B}$, $\lim_{\alpha,A}$ és $\lim_{\alpha,B}$ között. (Jegyzet 3.1-3.2.)

## 18. Függvények határértéke és egyenlőtlenségek

Ha $\alpha$ torlódási pontja az $A$ halmaznak, továbbá $\alpha$ egy $\dot{U}$ pontozott környezete és $A$ metszetén $f \leq g$, akkor $\limsup_{\alpha,A} f \leq \limsup_{\alpha,A} g$ és $\liminf_{\alpha,A} f \leq \liminf_{\alpha,A} g$. Ha $\limsup_{\alpha,A} f < \liminf_{\alpha,A} g$, akkor egy pontozott környezet és $A$ közös részében $f < g$. Határátmenet. A rendőr-elv és változatai. A függvényekre vonatkozó Cauchy-kritérium. (Jegyzet 3.3-3.4.)

## 19. Átviteli elv

Tetszőleges olyan $(x_n)$ sorozatra, amire $x_n \in A$, $x_n \neq \alpha$ és $x_n \to \alpha$, teljesül, hogy $\liminf_{\alpha,A} f \leq \liminf f(x_n) \leq \limsup f(x_n) \leq \limsup_{\alpha,A} f$. Létezik olyan $(x_n)$ sorozat, amire $x_n \in A$, $x_n \neq \alpha$, $x_n \to \alpha$ és $f(x_n) \to \limsup_{\alpha,A} f$. A határértékre vonatkozó átviteli elv. A folytonossága vonatkozó átviteli elv. (Jegyzet 3.5., TK 139–142)

## 20. Függvények határértéke és műveletek

Összeg-, szorzat- és hányadosfüggvény határértéke. Összeg-, szorzat- és hányadosfüggvény folytonossága. Összetett függvény határértéke és folytonossága. Szigorúan monoton függvény inverze folytonos az értékkészletre megszorítva. Áttérés új változóra. Nagyságrendek összehasonlítása. (0-hoz tartó függvényeké is.) Aszimptotikus egyenlőség. (TK 146–147; 149–153).

## 21. Korlátos, zárt intervallumon folytonos függvények

Bolzano-tétel. Konvex halmaz folytonos képe konvex, intervallum folytonos képe intervallum. Weierstrass-tétel. Korlátos zárt intervallum folytonos képe korlátos zárt intervalum. (TK 156-161)

## 22. Kompakt halmazon folytonos függvények

Halmazok belseje, külseje, határa. Nyílt és zárt halmazok. Egy halmaz akkor és csak akkor zárt, ha minden véges torlódási pontja eleme. Borel fedési tétel. Kompakt halmaz. A Weierstrass-tétel nem üres, kompakt halmazokra. Egyenletes folytonosság. Heine-tétel. Folytonosság, egyenletes folytonosság és Lipschitz-tulajdonság kapcsolata. (Jegyzet 4., TK 162-165)

## 23. Monotonitás, konvexitás és folytonosság

Szakadási helyek fajtái. Példák. Monoton függvény értékének és féloldai határértékének összhasonlítása. Monoton függvénynek csak elsófajú szakadási helyei vannak. Monoton függvénynek csak megszámlálható sok szakadási helye van. Ha egy monoton függvény képe intevallum, akkor folytonos.

> Figyelem! *A könytől eltérően csak azokat a szakadási helyeket neveztem ugráshelynek, ahol a féloldali határértékek léteznek, különbözőek és végesek.* Ha ezt a definíciót használjuk, akkor például az $1/x$ függvénynek a 0-ban másodfajú szakadása van.

Gyengén konvex függények. Ha egy gyengén konvex függvény felülről korlátos, akkor konvex. Ha egy gyengén konvex függvény folytonos, akkor konvex. Ha egy konvex függvény szigorúan gyengén konvex, akkor szigorúan konvex. (TK 166—174)

## 24. A függvénygrafikon ívhosza

A grafikon ívhossza, mint a beírt töröttvonalak hosszának felső határa. Rektifikálhatóság. Alsó becslés. Felső becslés monoton függvényekre. Additivitás. A $\pi$ definíciója. $2\sqrt{2} \leq \pi \leq 4$. Az $S(u) = s\big(\sqrt{1-x^2}; [u,1]\big)$ függvény tulajdonságai: monotonitás, folytonosság, alsó és felső becslés $0 < u < 1$ esetén. (TK 176–181)

## 25. Polinomok, racionális törtek, hatvány- és exponenciális függvények, logaritmus

Polinomok és racionális tört függvények. Folytonosság, határérték $\pm\infty$-ben. Az $a$ alapú exponenciális függvény (folytonosság, konvexitás, határérték). Bernoulli-egyenlőtlenség. Hatványfüggvények (folytonosság, konvexitás, határérték $\pm\infty$-ben). Logaritmusfüggvények (folytonosság, konvexitás, határérték $+0$-ban és $\infty$-ben). A logaritmus azonosságai (bizonyítás nélkül). (TK 182–189; 197–199)

## 26. Az $e^x$ és az $\ln x$ függvény

Az $(1+\frac{1}{x})^x$ és az $(1+\frac{1}{x})^{x+1}$ függvény monotonitása és határértéke. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{1/h} = e^b$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(1+\frac{b}{x})^x = \lim\limits_{h\to 0}(1+bh)^{1/h} = e^b$. Ha $x \neq 0$, akor $e^x > 1+x$ és $\log_e(1+x) < x$. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$ és $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_e(1+x)}{x} = 1$. (TK 190–192). Természetes logaritmus.

## 27. Nevezetes egyenlőtlenségek

Súlyozott hatványközepek. A súlyozott közepek közötti egyenlőtlenségek. A $p$-edik hatványközép határértéke $\infty$-ben, $-\infty$-ben és 0-ban (utóbbi bizonyítás nélkül). Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij és Hölder-egyenlőtlenség. (TK 194–196, 199–200).

## 28. Trigonometrikus függvények és inverzeik

Trigonometrikus függvények. Azonosságok. Az addíciós tételek bizonyítása. Periodicitás, folytonosság, Lipschitz-tulajdonság, monotonitás, konvexitás. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ és $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$. Arkusz függvények. (TK 203–209, 217; Jegyzet 6.1.).

## 29. Hiperbolikus függvények és inverzeik

A hiperbolikus koszinusz, szinusz, tangens és kontangens függvények. Azonosságok. Área függvények. (TK 212–215; Jegyzet 6.2.).