Valós analízis ZH, 2010. november 5.

Matematika BSC 1. évfolyam, „intenzív” szint

Mindegyik lapra írjátok rá a neveteket és legalább az egyikre a gyakorlatvezetőtök nevét.

Minden feladat 1 legfeljebb pontot ér. Részpontszám is kapható.

Az osztályzat az elért pontok száma, kerekítve.

Az íróeszközökön kívül más segédeszköz nem használható. (Számológép sem.)

Az előadáson és a gyakorlaton szerepelt állítások bizonyítás nélkül felhasználhatók, ha pontosan idézitek. (Pl. „Volt előadáson, hogy...”)

1. Legfeljebb mekkora lehet a^3b^2c, ha a, b, c nemnegatív valós számok, és $a + 2b + 3c = 5$?

2.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}} = ?$$

3. Mutass példát olyan n_0 számra, amire igaz, hogy tetszőleges $n > n_0$ esetén

$$\frac{1}{n - 5\sqrt{n}} > \frac{10n^2}{2^n - 100}.$$

4. Definiáljuk az $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozatot a következő rekurzióval: legyen $x_1 = 3\sqrt{2}$, és $x_{n+1} = \dfrac{8}{6 - x_n}$, ha $n \geq 1$. Mi a sorozat limesz szuperiora?

5. Mutass példát olyan asszociatív $\circ : P(\mathbb{R}) \times P(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R})$ műveletre (ami tehát $\mathbb{R}$ bármely két X, Y részhalmazához rendel egy újabb $X \circ Y$ részhalmazt), amire nézve az unió balról disztributív, de jobbról nem disztributív.

6. Bizonyítsd be, hogy tetszőleges (a_n) valós számsorozatra

$$\liminf \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{a_n} = e^{\liminf \frac{a_n}{n}}.$$

7. Bizonyítsuk be, hogy ha egy arkhimédészien rendezett testben minden Cauchy-sorozat konvergens, akkor a testben igaz a legkisebb felső korlát tétele is.