**Elemi matematika gyakorlat, 2010. szeptember 21.**

**1.** Oldjuk meg a pozitív egészek halmazán az $abc + ab + ac + bc - a - b - c = 50$ egyenletet.

KöMaL fórum alapján

**2.** Melyek azok a kétjegyű páros $\overline{ab}$ számok, amelyek ötödik hatványa $\overline{ab}$-re végződik?

(Tanárképző főiskolák matematika versenye, 1973; KöMaL)

**3.** Oldjuk meg az egész számhármasok halmazán az

$$x^3 + 3y^3 + 9z^3 = 9xyz$$

egyenletet.

Kürschák

**4.** Legyen $k \geq 2$, és legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_k$ különböző elemei az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak. Igazoljuk, hogy ha $a_1(a_2 - 1), a_2(a_3 - 1), \ldots, a_{k-1}(a_k - 1)$ mindegyike osztható $n$-nel, akkor $a_k(a_1 - 1)$ nem osztható $n$-nel.

Olimpia

**5.** Tetszőleges pozitív egész $m$-re jelölje $s(m)$ az $m$ számjegyeinek az összegét. Határozzuk meg az összes olyan $n$ pozitív egészt, amelynek egyetlen számjegye sem nulla, és teljesíti az

$$s(n^2) = 2^{s(n)}$$

összefüggést.

KöMaL

**6.** Legyenek $a$ és $b$ olyan pozitív egész számok, hogy minden $n$ pozitív egész számra $a^n + n$ osztója $b^n + n$-nek. Igazoljuk, hogy $a = b$.

KöMaL

**7.** Tegyük fel, hogy $a, b, n, k$ pozitív egészek, $n$ páratlan, $p$ páratlan prímszám, és $a^n + b^n = p^k$. Igazoljuk, hogy az $n$ a $p$-nek nemnegatív egész kitevős hatványa.

KöMaL

**8.** Milyen $n, k$ nemnegatív egészekre teljesül, hogy $2^n - 1 = 3^k$?

Arany D.

**9.** Igazoljuk, hogy ha $0 < a < b < c < d$ olyan páratlan egész számok, amikre $a + d$ és $b + c$ is 2-hatvány, továbbá $ad = bc$, akkor $a = 1$.

Olimpia

**10.** Keressük meg az összes olyan, pozitív egészekből álló $a, b$ párt, amelyre $a | b^2 + b + 1$ és $b | a^2 + a + 1$.

KöMaL

**11.** Legyen $a$ és $b$ pozitív egész. Igazoljuk, hogy ha $\dfrac{a^2 + b^2}{ab + 1}$ egész, akkor négyzetszám.

Olimpia

**12.** Igazoljuk, hogy ha $a > 1$, $x, y$ pozitív egészek és $axy - 1 | (ax^2 - 1)^2$, akkor $x = y$.

Olimpia

**13.** Igazoljuk, hogy ha $n > 1$ és $n | 6^n - 1$, akkor $5 | n$.

KöMaL