Elemi matematika gyakorlat, 2010. szeptember 28.

1. a) Igazoljuk, hogy minden n pozitív egész számra $3^{2^n}-1$ osztható 2^{n+2}-nel, de nem osztható 2^{n+3}-nal.
b) Mutassuk meg, hogy bármely n pozitív egész számra $2^{3^n}+1$ osztható 3^{n+1}-nel, de nem osztható 3^{n+2}-nel.

2. Legyen u_n az n-edik Fibonacci-szám ($u_1=u_2=1$, $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$). Igazoljuk, hogy $u_{n+1}u_k-u_nu_{k+1}=\pm u_{n-k}$.

3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy 111...1 alakú szám osztható 7-tel, akkor osztható 37-tel is.

KöMaL

4. Legfeljebb hányat lehet kiválasztani az $1,2,\ldots,2010$ számok közül úgy, hogy együk se legyen osztója semelyik másiknak?

5. (a) Legfeljebb hány részre oszthatja a síkot n körvonal?
(b) Legfeljebb hány részre oszthatja a teret n gömbfelület?

6. A $P_1,P_2,\ldots,P_{31}$ pontok az 10×10-es négyzetben vannak. Igazoljuk, hogy ezekhez létezik olyan Q pont, amire $P_1Q,P_2Q,\ldots,P_{31}Q$ mindegyike nagyobb, mint 1.

7. Igazoljuk, hogy bármely n egész szám között van néhány, amelyek összege osztható n-nel.

8. Igazoljuk, hogy bármely $2n-1$ egész között van n olyan, amelyek összege osztható n-nel.

9. Legyen u_n az n-edik Fibonacci-szám ($u_1=u_2=1$, $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$). Igazoljuk, hogy $(u_n,u_k)=u_{(n,k)}$.

10. Adott ($n\geq 3$) számú szakasz, mindegyik legalább egységnyi hosszú. Tudjuk, hogy akármelyik k darabot ($k=3,4,\ldots,n$) választjuk is ki közülük, ezek nem lehetnek egy sokszög oldalai. Igazoljuk, hogy a szakaszok összhossza nagyobb, mint 2^{n-1}.

11. Egy 1 kilométer oldalú, négyzet alakú fenyőerdőben 4500 darab, 50 cm átmérőjű fa van. Mutassuk meg, hogy lehet találni az erdőben olyan 10 m széles és 20 m hosszú téglalap alakú területet, amelyen egyetlen fa sem nőtt,

12. Az egységkörnek megrajzoltuk n húrját. Igazoljuk, hogy a kör belsejében van olyan pont, ami mindegyik húrtól legalább $1/n$ távolságra van.

KöMaL

13. Bizonyítsuk be, hogy ha $a_1+a_2+\cdots+a_{100}>0$, akkor az a_i+a_j ($1\leq i<j\leq 100$) összegek közül legalább 99 pozitív.

KöMaL