Elemi matematika gyakorlat, 2010. október 5.

1. Andrásnak van három dobókockája. Az elsőn a 1,4,4,4,4,4, a másodikon a 2,2,2,5,5,5, a harmadikon a 3,3,3,3,3,6 számok szerepelnek. A kockák közül Béla választ egyet, utána pedig András választ a maradék kettő közül. Mindketten dobnak a saját kockájukkal, Az nyer, aki nagyobbat dob. Kinek kedvez ez a játék?

2. Hány tagú társaságban lesz legalább 1/2 valószínűséggel két olyan személy, akinek ugyanazon a napon van a születésnapja?

3. A *Ki nevet a végén?* játékban akkor indulhatunk el a bábunkkal, amikor először hatost dobunk. Átlagosan hanyadik körben indulunk el?

4. Egy osztályban kisorsolják, hogy ki kit ajándozzon meg. Felírják a neveket egy-egy papírra, és mindenki húz egyet. Mekkora a valószínűsége annak, hogy senki sem húzza saját magát?

5. Egy-egy cédulára felírtuk az 1, 2, 3, illetve 4 számokat. Anna kihúz egy cédulát a négy közül, majd visszateszi a többi közé. Ezután Zsófi húz ki egy cédulát, majd visszateszi és ismét Anna következik stb. A kihúzott számot mindig hozzáadják az addig kihúzott számok összegéhez. Az nyer, akinek a húzása után először lesz az összeg 3-mal osztható. Mennyi a valószínűsége, hogy Anna nyer?

6. Három hajótörött mindegyike egy-egy órát tölt (egyhuzamban) egy szigeten ma délután valamikor 5 és 9 óra között (véletlenszerűen). Ha hármuk közül pontosan kettő fél óránál hosszabb ideig egyszerre tartózkodik ott, akkor viszály tör ki. Mekkora a valószínűsége annak, hogy békében telik el a mai nap?

7. Szindbád megmentette a kalifa életét, és ezért jutalmul feleségül veheti a kalifa egyik háremhölgyét. A háremhölgyek sorban elvonulnak Szindbád előtt, egyszerre csak egy háremhölgy jelenik meg. Szindbád minden háremhölgy szépségét össze tudja hasonlítani az előzőleg megjelentekkel, és egyértelműen meg tudja állapítani, hogy az eddig látott háremhölgyek közül ki a legszebb. Egy éppen megjelent háremhölgyről megjelenése után azonnal el kell döntenie, hogy őt akarja-e feleségül venni, és ezt a döntést később nem változtathatja meg. Szindbád tudja, hogy a kalifának hány háremhölgye van, viszont semmit nem tud arról, hogy a még nem látott háremhölgyek milyen szépek. A háremhölgyek véletlen sorrendben jelennek meg, és minden sorrend egyforma valószínű. Szindbád szeretné a legszebb háremhölgyet választani. Milyen stratégiával tudja ezt a lehető legnagyobb valószínűséggel elérni, és mekkora ez a valószínűség?

8. Egy kör kerületén véletlenszerűen kijelölünk k pontot. Mia valószínűsége annak, hogy a megjelölt pontok konvex burka tartalmazza a köt középoontját?

KöMaL

9. András, Béla és Cili talált egy egyforintost. Ki akarják sorsolni, hogy melyiküké legyen. Feldobják kétszer: két fej esetén András, fej-írás esetén Béla, írás-fej esetén Cili nyer. Két írás esetén újra dobnak. Várhatóan hányszor dobják fel a pénzt?

10. András és Béla egyszerre felmutatják 1 vagy 2 ujjukat (a kő-papír-ollóhoz hasonlóan). Ha ugyanannyit mutatnak, András nyer. Ha nem ugyannanyit, akkor pedig Béla. A győztes annyi forintot kap a vesztestől, mint ahány ujjukat összesen felmutatják. Igazságos-e ez a játék?

11. Igazoljuk, hogy tetszőleges $0 \le p \le 1$ és pozitív egész n, k számok esetén

$$(1-p^n)^k + \left(1-(1-p)^n\right)^k \le 1.$$

KöMaL

12. Igazoljuk, hogy tetszőleges $a_1, a_2, \ldots, a_N$ pozitív számokhoz létezik olyan véges $1 = n_0 < n_1 < \cdots < n_K = N+1$ indexsorozat, amire

$$n_1 a_{n_0} + n_2 a_{n_1} + \cdots + n_K a_{n_{K-1}} < 3(a_1 + a_2 + \cdots + a_N).$$

(KöMaL/Kürschák)