Elemi matematika gyakorlat, 2010. október 12.

1. Igazoljuk, hogy $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ racionális szám.

KöMaL

2. Az $x^3-10x+11=0$ egyenlet gyökei u, v és w. Határozzuk meg $\operatorname{arc\,tg} u+\operatorname{arc\,tg} v+\operatorname{arc\,tg} w$ értékét.

KöMaL

3. Az $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ függvényre $3f(f(x))=2f(x)+x$. $f=?$

4. Lehet-e egy kétváltozós valós együtthatós polinom értékkészlete a nyílt $(0,\infty)$ intervallum?

KöMaL

5. Mely $p(x)$ polinomokra teljesül az $(x-16)p(2x)=16(x-1)p(x)$ egyenlőség?

KöMaL

6. Milyen m értékekre osztható az $x^m+y^m+z^m-(x+y+z)^m$ polinom az $(y+z)(z+x)(x+y)$ polinommal?

KöMaL

7. Gyöktelenítsük az $\dfrac{1}{1+\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{8}}$ tört nevezőjét.

8. Határozzuk meg az összes olyan korlátos $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ függvényt, amely minden egész k és n esetén kielégíti az

$$f(k+n)+f(k-n)=2f(k)f(n)$$

egyenletet!

9. Az $x_{n+1}=x_n^2-x_n+1$ rekurzióval definiált sorozat elemeiből készítsük el a $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{x_i}$ végtelen sort. Mennyi ennek a sornak az összege, ha a) $x_1=1/2$; b) $x_1=2$?

KöMaL

10. Bizonyítsuk be, hogy ha $15a+6b+4c+8d=0$, akkor az $ax^3+bx^2+cx+d=0$ egyenletnek van pozitív gyöke.

KöMaL

11. Az $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ függvényre f(1) = 1, $f(3)=3$, $f(2n)=f(n)$, $f(4n+1)=2f(2n+1)-f(n)$, $f(4n+3)=3f(2n+1)-2f(n)$ minden n-re. Hány olyan n van az $1,2,\ldots,1988$ számok között, amelyekre $f(n)=n$?

Olimpia