

Elemi matematika gyakorlat, 2010. október 19.

1. Sándor Mátyás esetéből okulva, a hazafiak vezére egy egyenletet küldött barátainak:

$$2x^2 + 4xy + 7y^2 - 12x - 2y + N = 0.$$

A titkos üzenet az volt, hogy a hónap N . napján legyen a felkelés. A hazafiak gyakran mondogatták, hogy a felkelés az egyetlen megoldás. Ez jellemezte N -et is: az egyenletet egyetlen (x, y) valós számpár elégítette ki. Mennyi N értéke?

KöMaL

2. Mit kapunk maradékul, ha az x^{2001} polinomot elosztjuk $(x + 1)^2$ -nel?

KöMaL

3. Legyen $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, és legyen $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ egy olyan függvény, amelyre tetszőleges pozitív egész n esetén

$$|f(n) - qn| < \frac{1}{q}.$$

Igazoljuk, hogy $f(f(n)) = f(n) + n$.

KöMaL

4. Bizonyítsuk be, hogy ha az f függvényre

$$f(x + 1) + f(x - 1) = \sqrt{2}f(x)$$

minden valós x -re teljesül, akkor a függvény periodikus.

KöMaL

5. Keressük meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyre

$$f(x - f(y)) = f(x + y^{1999}) + f(f(y) + y^{1999}) + 1$$

teljesül tetszőleges x, y valós számok esetén.

KöMaL

6. Igaz-e, hogy ha az $f, g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ függvények szigorúan monoton nőnek és értékészletük a teljes \mathbb{Q} , akkor az $f + g$ függvény értékészlete is a teljes \mathbb{Q} ? (\mathbb{Q} a racionális számok halmaza.)

KöMaL, Fried Ervin

7. Az f polinomra teljesül, hogy $f(x^2 + 1) - f(x^2 - 1) = 4x^2 + 6$. Határozzuk meg az $f(x^2 + 1) - f(x^2)$ polinomot.

KöMaL

8. Léteznek-e olyan f és g racionális tört függvények, amelyekre

$$f(x)^3 + (g(x))^3 = x?$$

KöMaL

9. Határozzuk meg azon p, q pozitív prímeket, amelyekre az $x^4 + p^2x + q = 0$ egyenletnek van többszörös gyöke.

KöMaL, Besenyei Ádám

10. Egy nagy, önkiszolgáló raktárban rengeteg árut tárolnak legfeljebb 1 tonnás csomagokban. Van egy 3 és egy 4 tonnás teharautónk. Szerződést akarunk kötni, amelyben vállaljuk, hogy a raktárból egy fordulóval legalább N tonna árut szállítunk el. Mekkora N legnagyobb értéke?

KöMaL / Arany D.

11. Oldjuk meg az

$$x = \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + x}}}$$

egyenletet.

KöMaL