Elemi matematika gyakorlat, 2010. november 9.

1. Az $ABCD$ négyszögben $DAB\angle = 90°$, $ABC\angle = 100°$ és $BC = AD$. Az AB oldal felező merőlegese és a CD oldal felező merőlegese a P pontban metszik egymást. Mekkora az APB szög?

(KöMaL)

2. Egy Δ háromszög beírt köréhez meghúzzuk az olalakkal párhuzamos érintőket, ezek egy-egy kis háromszöget vágnak le Δ-ból.

(a) Mekkora lehet a kis háromszögek kerületének összege?
(b) Mekkora lehet a kis háromszögek területének összege?
(c) Hogyan általánosíthatjuk a feladatot beírt kör helyett az egyik oldalhoz hozzáírt körre?
(d) Hogyan általánosíthatjuk a feladatot térben, háromszög helyett tetraéderrel?

3. Legfeljebb hány olyan gömb van, ami érinti egy adott tetraéder lapsíkjait?

4. In triangle ABC, let J be the centre of the excircle tangent to side BC at A_1 and to the extensions of sides AC and AB at B_1 and C_1, respectively. Suppose that the lines A_1B_1 and AB are perpendicular and intersect at D. Let E be the foot of the perpendicular from C_1 to line DJ. Determine the angles $\angle BEA_1$ and $\angle AEB_1$.

(Görög feladatjavaslat a 2006-os olimpiára)

5. Az ABC szabályos háromszög körülírt körének AB ívén vegyük fel a P, a BC íven a Q és R, továbbá a CA íven az S és T pontokat úgy, hogy $AP = BQ = CR = CS = AT$ teljesüljön. A BQ és PR egyenesek metszéspontja legyen U, az AS és PT metszéspontja V; végül az AU és BV egyenesek metszéspontját jelöljük W-vel. Igazoljuk, hogy az AU, BV és PW egyenesek páronként $60°$-os szöget zárnak be.

(KöMaL)

6. Szerkesszük meg a háromszöget, ha adott az a három pont, ahol a súlyvonalak meghosszabbításai metszik a körülírt kört.

(KöMaL, Rácz János feladata)

7. Adott az e egyenesen hat különböző pont: A, B, C, D, E és F. Tudjuk, hogy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$. Szerkesszünk egyetlen egyenes vonalzóval olyan egyenest, amely párhuzamos e-vel.

(KöMaL)

8. Point P lies on side AB of a convex quadrilateral $ABCD$. Let ω be the incircle of triangle CPD, and let I be its incenter. Suppose that ω is tangent to the incircles of triangles APD and BPC at points K and L, respectively. Let lines AC and BD meet at E, and let lines AK and BL meet at F. Prove that points E, I, and F are collinear.

(Lengyel feladatjavaslat a 2007-os olimpiára)

(Segítség: keressünk további érintő köröket, vizsgáljuk a különböző körpárok hasonlósági pontjait.)

9. Adott az e egyenesen négy különböző pont: A, B, C és D, és tudjuk, hogy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Létezik-e olyan, egyetlen egyenes vonalzót használó szerkesztési eljárás, amely egy e-vel párhuzamos egyenest szerkeszt meg?