

Elemi matematika gyakorlat, 2010. november 16.

1. Mutasd meg, hogy minden tetraéderhez található egy olyan paralelepipedon, amelyben a tetraéder minden éle lapátló.
2. Mutasd meg, hogy egy tetraéder szemközti (kitéró) éleinek felezőpontjait összekötő három szakasz átmegegy egy ponton.
3. Igaz-e, hogy a térbeli derékszögű koordinátarendszer üres rácstetraédereinek mind ugyanakkora a térfogata? (Egy rácspoliédert üresnek nevezünk, ha a csúcsain kívül nem tartalmaz rácspontot sem a belsejében, sem a határán.)
4. Igaz-e, hogy a térbeli derékszögű koordinátarendszer üres rácsparalelepipedonjainak mind ugyanakkora a térfogata?
5. Mely tetraédereknek van körülírt gömbje (azaz a tetraéder összes csúcsát tartalmazó gömbje)?
6. Mely tetraéderekhez található olyan gömb, amely a tetraéder összes élét érinti?
7. Igaz-e, hogy ha egy tetraéder beírt és körülírt gömbjének középpontja egybeesik, akkor a tetraéder szabályos?
8. Adott két sík a térben, melyek α szöget zárnak be egymással. Az egyik síkban adott egy sokszög, amelyet merőlegesen levetítünk a másik síkra. Mekkora lehet az eredeti sokszög és a vetületként kapott sokszög területének aránya?
9. Egy tetraéderbe egységnyi sugarú gömb írható. A gömbnek a tetraéder lapjaival párhuzamos érintősíkjai a tetraédeből egy-egy kis tetraédert vágnak le. Mekkora az ezekben a tetraéderekbe írható gömbök sugara-inak összege? (KöMaL)
10. Legyen adott egy gömb. Bármely, a gömböt nem metsző és nem is érintő e egyeneshez rendeljük hozzá az e' egyenest a következő módon: tekintsük a gömbnek az e -re illeszkedő érintő síkjait, és az érintési pontokat összekötő egyenes legyen e' .
Igaz-e, hogy ha f és g metsző egyenesek, akkor f' és g' is metszi egymást? (KöMaL)
11. Adott egy R sugarú gömb. A gömböt elmetszi két párhuzamos sík, melyek távolsága a gömb középpontjától d_1 és d_2 . Mekkora a gömb két sík közé eső részének térfogata és felszíne?
12. Az $ABCD$ tetraéder D csúcsából induló élek páronként merőlegesek egymásra. Az ABC lap többi lappal bezárt hajlásszöge α , β , γ . Igazoljuk, hogy

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \leq \frac{\sqrt{3}}{9}$$

13. Négy pont egyenes vonalú egyenletes mozgást végez a síkon. Tudjuk, hogy a pontok 6 lehetséges találkozásból öt bekövetkezik. Mutasd meg, hogy a hatodik is bekövetkezik.
14. (Desargues tétele) Adott két háromszög ($A_1A_2A_3$ és $B_1B_2B_3$) és egy O pont a síkon, melyekre O , A_1 , A_2 egy egyenesre esik, és ugyanez igaz O , B_1 , B_2 , illetve O , C_1 , C_2 esetén is (a két háromszög perspektív). C_3 az A_1A_2 és a B_1B_2 oldalak egyenesének metszéspontja, hasonlóan definiáljuk a C_1 és C_2 pontokat. Mutasd meg, hogy C_1 , C_2 , C_3 egy egyenesre esik.
15. Mutasd meg, hogy egy 10cm sugarú körlapot nem lehet lefedni 19 darab 1cm szélességű (végtelen) sávval.
16. Egy gömbháromszög oldalai a , b , c , szögei α , β , γ . Igazoljuk, hogy

$$c > a \cos \beta + b \cos \gamma.$$

(IMC, KöMaL)