Elemi matematika gyakorlat, 2010. november 23.

1. Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza a és b, átfogója c. A b befogóhoz írt kör (ami kívülről érinti a befogót és a másik két oldal meghosszabbítását) sugara ϱ_b. Igazoljuk, hogy $b + c = a + 2\varrho_b$. (KöMaL)

2. Az $ABCD$ trapéz átlói az M pontban metszik egymást. Az ABM és CDM háromszögek területe 18, illetve 50 egység. Mekkora a trapéz területe? (KöMaL)

3. A hegyesszögű ABC háromszög C-ből induló szögfelezője messe a szemközti oldalt az F pontban. Az F-ből a BC, illetve CA oldalakra bocsátott merőlegesek talppontjai rendre P és Q. Legyen M az AP és BQ egyenesek metszéspontja. Bizonyítsuk be, hogy AB és CM merőleges egymásra. (KöMaL)

4. Az ABC derékszögű háromszög befogóinak hossza $AC = 3$ és $BC = 4$. Az A pontot elmozdítottuk BC-vel párhuzamosan az A_1 pontba, ezután a B pontot elmozdítottuk az A_1C egyenessel párhuzamosan a B_1 pontba, végül C-t mozdítottuk el A_1B_1-gyel párhuzamosan a C_1 pontba úgy, hogy a kapott $A_1B_1C_1$ háromszög B_1-ben derékszögű, az A_1B_1 befogójának hossza pedig 1 egység. Milyen hosszú lett a B_1C_1 befogó? (KöMaL)

5. Bizonyítsuk be, hogy egy derékszögű háromszögben a hegyesszögek szögfelezőinek és a körülírt körnek a metszéspontjai, valamint a befogók és a beírt kör érintési pontjai egy egyenesen vannak. (KöMaL)

6. Az A, B, C, D pontok ebben a sorrendben egy egyenesre esnek. Az egyenes egyik oldalán rajzoljuk meg az ABE és CDF szabályos háromszögeket. Legyen G az ACE és BDF körök metszéspontja az $ABCD$ egyenes ugyanazon oldalán. Igazoljuk, hogy

$$AGD\sphericalangle = 120°.$$

(KöMaL)

7. Az egység oldalú, szabályos ABC háromszöget úgy mozgatjuk a 120°-os XOY szög tartományában, hogy az A csúcs az OX szárra, a B csúcs az OY szárra illeszkedik, és az AB egyenes elválasztja egymástól a C és az O pontot. Határozzuk meg a C csúcs mértani helyét. (KöMaL)

8. Az ABC háromszög A és B csúcsából induló szögfelezője a szemközti oldalakat A_1-ben, illetve B_1-ben metszi. Az A_1B_1 félegyenesnek a háromszög körülírt körével alkotott metszéspontja P. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{PA} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}.$$

(KöMaL)

9. Az $ABCD$ húrnégyszög átlóinak metszéspontja X. Az ABX és CDX körök második metszéspontja Y. Vegyük fel a Z pontot úgy, hogy a BZC és AYD háromszögek hasonlóak legyenek. Mutassuk meg, hogy ha a $BZCY$ négyszög konvex, akkor érintőnégyszög. (KöMaL)

10. Adott az $ABCD$ konvex négyszög és a belsejében a P pont úgy, hogy $AP = CP$, $ABC\sphericalangle = APD\sphericalangle$ és $CDA\sphericalangle = CPB\sphericalangle$. Mutassuk meg, hogy

$$DA \cdot AB \cdot BP = BC \cdot CD \cdot DP.$$

(KöMaL)