Elemi matematika gyakorlat, 2010. november 30.

1. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójának tetszőleges pontja P, C-ből induló magasságának talppontja C_1. P vetülete az AC befogón A_1, a BC-n B_1.

a) Bizonyítsuk be, hogy a P, A_1, C, B_1, C_1 pontok egy körön vannak.

b) Bizonyítsuk be, hogy az $A_1B_1C_1$ és az ABC háromszögek hasonlók.

(KöMaL)

2. Az egyenlő szárú derékszögű ABC háromszög AB átfogóján adottak a K és az M pontok. K az A és az M között van, továbbá $KCM\angle = 45^o$. Bizonyítsuk be, hogy $AK^2 + MB^2 = KM^2$. (KöMaL)

3. Jelölje P, illetve Q az ABC háromszög AB oldalára kifelé rajzolt $ABDE$ négyzet és a BC oldalára kifelé rajzolt $BCGH$ négyzet középpontját. Az AC és a DH szakaszok felezőpontja R, illetve S. Mutassuk meg, hogy a P, Q, R és S pontok egy négyzet csúcsai. (KöMaL)

4. A körbe írható konvex $ABCDEF$ hatszögben $AB = BC = a$, $CD = DE = b$, végül $EF = FA = c$. Bizonyítsuk be, hogy a BDF háromszög területe fele a hatszög területének. (KöMaL)

5. Az ABC körív F felezőpontjának az ABC töröttvonalon levő merőleges vetületét jelölje T. Bizonyítsuk be, hogy T felezi a töröttvonal hosszát. (KöMaL)

6. Az $ABCD$ húrnégyszög BD átlója egyben a körülírt kör átmérője. Az ABC háromszög oldalainak a hossza legalább 1. Bizonyítsuk be, hogy a négyszög területe nagyobb, mint $\frac{1}{2}$ területegység. (KöMaL; Klein Eszter és Terrence Tao feladata)

7. Mutassuk meg, hogy ha A_1B_1, A_2B_2 és A_3B_3 egy kör három párhuzamos húrja, akkor az A_1, A_2, illetve A_3 pontból rendre a B_2B_3, B_3B_1 és B_1B_2 egyenesre állított merőlegesek egy ponton mennek át. (KöMaL)

8. Az $ABCDE$ négyoldalú gúlában az ACE sík 45^o-os szöget zár be az $ABCD$, ABE, BCE, CDE és DAE lapok mindegyikével. Igazoljuk, hogy $AB^2 + AD^2 = BC^2 + CD^2$. (KöMaL)

9. Az ABC háromszög beírt köre az AB oldalt a C_1, a BC oldalt az A_1, a CA oldalt pedig a B_1 pontban érinti. Mint ismeretes, AA_1, BB_1 és CC_1 szakaszok egy ponton mennek át; jelöljük ezt a pontot N-nel. Rajzoljuk meg azt a három kört, amely átmegy N-en és érinti valamelyik két oldalt. Igazoljuk, hogy a hat érintési pont egy körön van. (KöMaL)

10. Az $A_1A_2A_3A_4$ négyszög belsejében adott egy P pont úgy, hogy nincs rajta egyik átlón sem. Legyen B_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ az A_iP szakasz egy belső pontja. Jelölje C_{ij} az A_iB_j és A_jB_i egyenesek metszéspontját $(1 \leq i < j \leq 4)$. Bizonyítsuk be, hogy a $C_{12}C_{34}$, $C_{13}C_{24}$, $C_{14}C_{23}$ szakaszok egy ponton mennek át. (KöMaL)