

Elemi matematika gyakorlat, 2010. december 7.

1. Egy ország bármely két városát vagy hajó-, vagy repülőút köti össze. Bizonyítsuk be, hogy vagy hajóval, vagy repülővel bejárható az egész ország.
2. Adott egy véges gráf. Szeretnénk a csúcsaira természetes számokat írni úgy, hogy két csúcsra írt számnak pontosan akkor legyen 1-nél nagyobb közös osztója, ha a két csúcs a gráfban össze van kötve. Meg lehet-e ezt mindig tenni? Mi a helyzet ha a követelmény fordított: két csúcson szereplő szám pontosan akkor legyen relatív prím, ha él köti össze őket?
3. Egy körmérkőzéses sakkversenyen orosz és amerikai sakkozók vettek részt. Mindenki mindenkivel egyetlen partit játszott. Mutassuk meg, hogy volt olyan hazafiatalan résztvevő, aki legalább annyi pontot szerzett a honfitársai ellen, mint a másik ország fiai ellen.
4. Egy társaságban mindenki legfeljebb 12 másik embert utál (az utálat mindig kölcsönös). Mutassuk meg, hogy a résztvevőket el lehet helyezni két terembe úgy, hogy a kisebbik teremben mindenki legfeljebb 5, a nagyobbikban mindenki legfeljebb 8 másikat utáljon.
5. Mutasd meg, hogy egy ping-pong körmérkőzés résztvevői sorbaállíthatók úgy, hogy mindenki legyőzte a közvetlenül mögötte álló embert!
6. Barátság-probléma: Egy társaságban bármely két embernek pontosan egy közös ismerőse van. Igaz-e, hogy vagy mindenkinek azonos számú ismerőse van, vagy van olyan ember, aki a társaság minden tagját ismeri?
7. Egy konvex poliéder egyik lapjának csúcsait pirosra, a többi csúcsot pedig kékre színeztük. Bizonyítsuk be, hogy van olyan kék csúcs, amelyből legfeljebb 5 él indul ki, vagy pedig van olyan piros csúcs, amelyből legfeljebb 3 él indul ki. (KöMaL)
8. Bergengóciában olyan az úthálózat, hogy a városok közötti utak nem ágaznak el, minden út két várost köz össze. Az úthálózat összefüggő, vagyis az utakon bármelyik városból bármelyik városba el lehetett jutni — legalábbis a múlt hétig. A világgazdasági válság miatt ugyanis a bergengóc kormány változatos megszorításokra kényszerült. Az Utazásról Leszoktató Minisztérium például a következőket rendelte el:

56789/2010. Min. rendelet a helyváltoztatás szabadságának megőrzéséről és védelméről

1.§ (a) Az ország mindegyik útját egyirányúsítani kell.

(b) Az utak irányát olyan módon kell megválasztani, hogy ne lehessen körbe utazni több város között.

Az intézkedés bevezetése ellen hevesen tiltakoztak a kukutyiniak, mert hozzájuk minden út befelé vezetett, és emiatt sehova nem tudtak utazni. A demonstráció vezérszónoka Mariska néni volt, aki az unokahúga nagybátya sógorának a régi kollégiumi szobatárását szerette volna meglátogatni Alsómocsoládon. A tiltakozások eredményeként a minisztérium a következővel egészítette ki a rendeletet:

2.§ (a) Minden héten, ha van olyan város, ahonnan csak kifelé vezet út, akkor ezek közül ki kell választani az egyiket, és az innen kifelé vezető utak irányítását meg kell fordítani.

(b) Az (a) pont rendelkezéseiben előírtaktól eltekintve, a többi út irányítása nem változik.

Eljuthat-e Mariska néni Kukutyinból Alsómocsoládra?