Házi feladatok a 2011. szeptember 19-i KFT gyakorlatra

1. Ábrázold azoknak a z komplex számoknak a halmazát, amikre

(a) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| = 1$; (b) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| = 2$; (c) $\arg(z+1) = \arg(2z-1)$ $(-\pi < \arg z \le \pi)$;

(d) $\operatorname{Re}(z^2) = 4$; (e) $\operatorname{Re}\dfrac{z-1}{z+1} = 0$; (f) $0 < \operatorname{Re}(iz) < 2\pi$; (g) $|\arg(z)| < \dfrac{\pi}{4}$;

(h) $\dfrac{|z|}{\operatorname{Re} z} < K$; (i) $|z-1| + |z+1| < 4$; (j) $\operatorname{Re}\dfrac{1+z}{1-z} > 0$

2. Legyen $a, b, c \in \mathbb{C}$. Milyen geometriai jelentése van az $\frac{1}{2}\operatorname{Im}\Big((c-a)\cdot\overline{(b-a)}\Big)$ számnak?

3. Hova képezi a $w(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ (Zsukovszkij-leképezés)

(a) Az egységkörvonalat? (b) az egységkörvonal belsejét? (c) a külsejét?

(d) a 0 középpontú köröket? (e) a 0-n átmenő egyeneseket?

Szorgalmi feladatok

4. Tegyük fel, hogy a $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ leképezés távolságtartó. Mutassuk meg, hogy $w(z) = Az + B$ vagy $w(z) = A\bar{z} + B$, ahol $|A| = 1$.

5.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \ldots = ?$$

6. Az $A_1A_2\ldots A_n$ szabályos n-szög egységnyi sugarú körülírt körén adott egy P pont. Mutasd meg, hogy

$$PA_1 \cdot PA_2 \cdot \ldots \cdot PA_n \le 2.$$

7. Hova képezi a $k(z) = \dfrac{z}{(1-)z^2}$ Koebe-féle függvény a (0 középpontú) nyílt egységkörlemezt?

8. Legyen $p(z)$ nem konstans, komplex együtthatós polinom. Bizonyítsuk be a következő állításokat!

(a) Ha p minden gyökének negatív a valós része és $\operatorname{Re} z \ge 0$, akkor $\operatorname{Re}\dfrac{p'(z)}{p(z)} > 0$.

(b) Ha $p(z)$ gyökei a $\operatorname{Re} z < 0$ félsíkba esnek, akkor $p'(z)$ gyökei is.

(c) (Gauss tétele) Ha $p(z)$ nem konstans komplex polinom, akkor p gyökeinek konvex burka tartalmazza p' gyökeit.

Még több feladat

9. Legyen $f(z)$ nem konstans polinom. Igazold, hogy

(a) a $\operatorname{Re} f$ és $\operatorname{Im} f$ függvényeknek sehol sincs lokális szélsőértékhelye;

(b) az $|f|$ függvénynek csak olyan helyen lehet szélsőértéke, ahol $f = 0$.

(c) Hogyan következik az utóbbi állításból az algebra alaptétele?

10. A komplex számsíkra merőlegesen, a sík által határolt egyik féltérben felvettük az a, b, illetve c, d átmérőjű félköröket. Bizonyítsd be, hogy a két félkör akkor és csak akkor metszi egymást merőlegesen, ha $(a, b, c, d) = -1$.

(Riesz-verseny, 1988)

11. Legyen $n \ge 2$ és $u_1 = 1, u_2, \ldots, u_n$ legfeljebb 1 abszolút értékű komplex számok, továbbá legyen

$$f(x) = (x-u_1)(x-u_2)\ldots(x-u_n).$$

Igazoljuk, hogy az $f'(x)$ polinomnak van olyan komplex gyöke, aminek a valós része nemnegatív.

(KöMaL A. 430.)

12. Legyen $n \ge 2$ és $u_1, u_2, \ldots, u_n$ legfeljebb 1 abszolút értékű komplex számok, továbbá legyen

$$f(x) = (x-u_1)(x-u_2)\ldots(x-u_n).$$

Igazoljuk, hogy az $f'(x)$ polinomnak van olyan w komplex gyöke, amire $|w - u_1| \le 1$.

(Iliev-Sendov sejtés, megoldatlan)