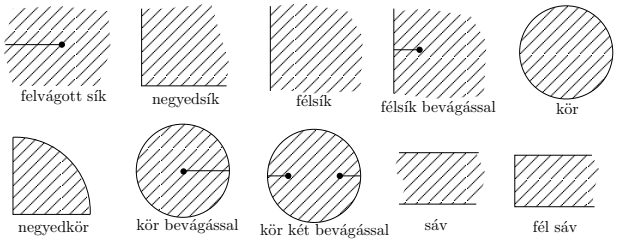
Komplex függvénytan gyakorlat, 2011. szeptember 26.

1. Az ábrán tízféle nyílt, egyszeresen összefüggő tartomány látható. Keressünk közöttük konform megfeleltetéseket (oda/vissza differenciálható bijekciókat).

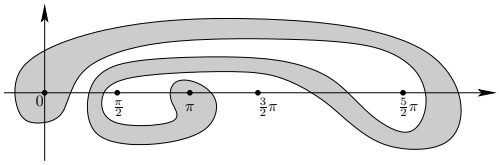


2. Számítsuk ki az $1/z$ függvény vonalintegrálját a 0 körüli r sugarú körön.

3.
$$\int\limits_{|z|=1} \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Re} \mathrm{d}z = ?; \qquad \int\limits_{|z|=1} \overline{z}\,\mathrm{d}z = ?; \qquad \int\limits_{[1,i]} |z|^2\,\mathrm{d}z = ?$$

4. Igazoljuk, hogy tetszőleges a komplex számra $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \cdot e^{iax}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi} \cdot e^{-a^2/2}$.

5. Az ábrán látható tartományon az $f(z) = \log\cos z$ függvény folytonosan értelmezhető úgy, hogy $f(0) = 0$. Mennyi $f(\pi)$?



Házi feladatok

6. Ábrázold a síkon a következő halmazokat:
$$\left\{e^z :\ 0 < \operatorname{Re} z < 1,\ 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}\right\}; \qquad \left\{\cos z :\ 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2},\ 0 < \operatorname{Im} z\right\}$$

7. Legyen Γ_1 a $(0,1)$ és $(1,1+i)$ irányított szakaszok uniója; Γ_2 az $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z$ egyenes 0 és $1+i$ közötti íve; Γ_3 az $\operatorname{Im} z = (\operatorname{Re} z)^2$ parabola 0 és $1+i$ közötti íve . Számítsd ki az $\int_{\Gamma_j} z^2$ vonalintegrálokat.

8. Legyen n egész szám és $r > 0$. $\displaystyle\int\limits_{|z|=r} z^n\,\mathrm{d}z = ?$

9.
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \cdot \cos(ax)\,\mathrm{d}x = ?$$

10. A $p(z)$ legalább másodfokú polinom gyökei az $|z| < \varrho$ kör belsejébe esnek. Legyen tetszőleges $R > |\varrho|$ esetén
$$I(R) = \int_{|z|=R} \frac{\mathrm{d}z}{p(z)}.$$
Igazold, hogy (a) $\lim\limits_{R\to\infty} I(R) = 0$; (b) $I(R)$ értéke állandó; (c) $I(R) = 0$.

Szorgalmi feladatok

11. Legyen $a_1, a_2, \ldots$ komplex számsorozat, amire bármely k esetén $|a_k| < 1$ és $\operatorname{Re} a_k > \frac{1}{2}$. Legyen $z_0 = 0$, és $z_{n+1} = \dfrac{z_n + a_n}{1 + a_n z_n}$. Igazoljuk, hogy $z_n \to 1$.

(IMC 2011/6 alapján)

12. Legyenek a, b komplex számok, $|b| < 1$. Igazoljuk, hogy $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1} \left|\frac{z-a}{z-b}\right|^2 |\,\mathrm{d}z| = \frac{|a-b|^2}{1-|b|^2} + 1$.

13. Igazold, hogy ha $p(z)$ legalább másodfokú polinom, és a gyökei, $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ különbözők, akkor $\sum \frac{1}{p'(\varrho_k)} = 0$.