Komplex függvénytan gyakorlat, 2011. október 17.

1. A maximum-elv felhasználával bizonyítsuk be, hogy ha egy függvény reguláris és nem konstans egy nyílt halmazon, akkor a valós és a képzetes részének nincs lokális szélsőértéke.

2. A Liouville-tételből vezessük le, hogy ha egy egészfüggvény a síkot az egységkör külsejébe képezi, akkor konstans.

3. Fejtsük Laurent-sorba az $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ függvényt az $1 < |z| < 2$ tartományon. Számítsuk ki az együtthatókat az együtthatóformulából is.

4. Az f függvény akárhányszor integrálható a $1 < |z| < 2$ gyűrűn. Igazoljuk, hogy analitikusan folytatható a teljes $|z| < 2$ körlapra.

5. Fejtsük Laurent-sorba az $\dfrac{e^z}{z-1}$ függvényt a 0 körül, az $|z| > 1$ tartományon.

6. Az f függvény reguláris az $|z| < 1 + \varepsilon$ körlemezen. Legyen $A = \max\limits_{0 \le t \le \pi} |f(e^{it})|$ és $B = \max\limits_{\pi \le t \le 2\pi} |f(e^{it})|$. Bizonyítsd be, hogy $|f(0)| \le \sqrt{AB}$.

Házi feladatok

7. Bizonyítsuk be, hogy egy nem konstans egészfüggvény valós része nem lehet korlátos sem alulról, sem felülről.

8. Igazoljuk, hogy ha f kétszeresen periodikus egész függvény (azaz $f(z+a) = f(z), f(z+b) = f(z)$ és az a, b periódusok nem egy közös c periódus egész számú többszörösei), akkor f konstans.

9. Fejtsd Laurent-sorba az $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ függvényt a $0 < |z| < 1$ és a $2 < |z|$ tartományokon.

10. Legyen $f(z)$ legyen értelmezve és folytonos a $\{|z| \le 1\} \setminus \{1\}$ halmazon, reguláris a belsejében, és $|f(z)| \le 1 \ \ (|z| = 1,\ z \ne 1)$. Igaz-e, hogy ekkor $|f(z)| \le 1 \ \ (|z| < 1)$?

11. Milyen a pozitív valós számokra igaz, hogy ha $f(z)$ egészfüggvény, $f(z+1) = f(z)$, és $f(z)e^{-a|\operatorname{Im} z|}$ korlátos, akkor f konstans?

Szorgalmi feladatok

12. Bizonyítsd be, hogy ha az f függvény reguláris az $|z| > 1$ tartományon és tetszőleges, az $|z| < 3$ körlapon reguláris g függvényre

$$\int_{|z|=2} f(z)g(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

akkor f kiterjeszthető regulárisan a teljes síkra.

13 (Parseval-formula Laurent-sorokra.). Tegyük fel, hogy az $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ Laurent-sor konvergens az $r - \varepsilon < |z| < r + \varepsilon$ körgyűrűn. Igazold, hogy

$$\frac{1}{2\pi r} \int\limits_{|z|=r} |f(z)|^2 \cdot |\,\mathrm{d}z| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

14. A Schwarz-lemma segítségével igazoljuk, hogy ha f reguláris az egységkörben és $|f(z)| < 1$, akkor

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \le \frac{1}{1 - |z|^2}.$$