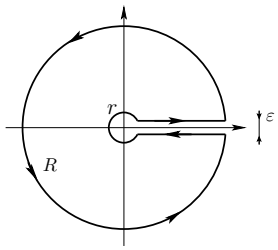
Komplex függvénytan gyakorlat, 2011. november 7.

1. Számítsuk ki a $\dfrac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{x^2-\frac{1}{4}}$ függvény reziduumaiból a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2-\frac{1}{4}}$ összeget. Utána számítsuk ki elemien (teleszkópos összeggé alakítva) is, hogy összehasonlítsuk az eredményt.

2.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} = ? \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = ?$$

3.
$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-it}}{x^4+1} = ?$$

4. Legyen $\Gamma_{r,R,\varepsilon}$ az ábrán látható görbe, ahol R nagy, r kicsi és ε még r-nél is sokkal kisebb. Milyen összefüggést kapunk a $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\lim_{r\to+0}\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{r,R,\varepsilon}} \frac{\log z}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$ határérték vizsgálatából?



5. Hány gyöke van a 2^z+3z^2-z függvénynek az egységkörben?

6. Legyen $|a|=3$. Hány gyöke lehet (multiplicitással számolva) a z^4+z^3+az-1 polinomnak az $1<|z|<2$ tartományon?

7. Bizonyítsuk be az algebra alaptételét Rouché tételéből.

Házi feladatok

8.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k+1} = ? \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2k^2-1} = ?$$

9.
$$\int_0^{\infty} \frac{x^a}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = ? \quad (0<a<1) \qquad \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n} = ? \qquad \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = ?$$

10. Hány gyöke van az adott egyenleteknek a megadott tartományokon?
(a) $\sin z = 2z^2$, $|z|<1$; (b) $z^4+z^3-4z+1=0$, $1<|z|<2$; (c) $z^6-6z+10$, $|z|>1$.

11. Tegyük fel, hogy f meromorf az $1\le|z|\le 2$ halmazon, és $|f(z)|\le 1$, ha $|z|=1$ vagy 2. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $f(z)$ a 2 értéket éppen annyiszor veszi fel, mint ahány pólusa van ebben a körgyűrűben.

12. Be lehet-e bizonyítani az algebra alaptételét úgy, hogy a Brouwer-fixponttételt a $z+af(bz+c)$ függvényre alkalmazzuk valamilyen alkalmas a,b,c konstansokkal?

Szorgalmi feladatok

13.
$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1} = ? \qquad \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \int_0^{\infty} \cos(x^a)\,\mathrm{d}x = ? \qquad \int_0^{\infty} \sin(x^a)\,\mathrm{d}x = ? \quad (a>1)$$
$$\int_0^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = ?$$
$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \int_0^{\infty} \frac{\log^2 x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \int_0^{\pi/2} \log\sin x\,\mathrm{d}x = ?$$

14. Legyen n pozitív egész szám és φ egészfüggvény. Tetszőleges $X>0$ valós szám esetén legyen
$$f(X) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|s|=n+1} \frac{\varphi(s)\cdot X^s}{s(s-1)(s-2)\cdot\ldots\cdot(s-n)}\,\mathrm{d}s.$$
(a) Igazoljuk, hogy $f(X)$ polinom.
(b) Mutassuk meg, hogy ha φ polinom, és $\deg\varphi = k < n$, akkor f-nek az 1 pontosan $(n-k)$-szoros gyöke.

15. Tegyük fel, hogy a γ egyszerű zárt görbe a belsejével együtt a D tartományban fekszik, ahol f és g reguláris, továbbá a γ görbén $|f|>|g|$. Igazoljuk Rouché tételét az $I(u)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(f+ug)'}{f+ug}$ paraméteres integrál vizsgálatával.