Komplex függvénytan ZH, 2011. október 26.
Megoldásvázlatok

1. Milyen pontokban differenciálható az $|z|^2 - (2+i)\bar{z}$ függvény?

Megoldás. Ha $z = x + yi$, akkor az

$$|z|^2 - (2+i)\bar{z} = (x^2+y^2) - (2+i)(x-yi) = (x^2 - 2x + y^2 - y) + (-x+2y)i$$

függvény azokban a pontokban differenciálható komplex értelemben, ahol az $u(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - y$ és $v(x,y) = -x + 2y$ mint $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatók és teljesülnek rájuk a Cauchy-Riemann egyenletek. Mivel u és v is polinom, mindenhol differenciálhatók. A Cauchy-Riemann egyenletek:

$$\begin{aligned} \partial_1 u = \partial_2 v, \qquad & \partial_2 u = -\partial_1 v \\ 2x - 2 = 2, \qquad & 2y - 1 = 1 \\ x = 2, \qquad y = 1, \qquad & z = 2 + i. \end{aligned}$$

A függvény egyedül az $2+i$ pontban differenciálható.

Típushiba: Többen csak a Cauchy-Riemann egyenleteket ellenőrizték, de nem mondtak semmit arról, hogy az u és v függvények valós értelemben differenciálhatók. Ők kaptak 0,8 pontot.

Pontszámok: 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0,9, 0,9, 0,8, 0,8, 0,8, 0,8, 0,8, 0,8, 0,8, 0,8, 0,7, 0. Átlag: 0,83.

2. Fejtsd Laurent-sorba a $\dfrac{2z^3-1}{z^2+z}$ függvényt az i körül, az $1 < |z-i| < \sqrt{2}$ halmazon.

Megoldás.

$$\frac{2z^3-1}{z^2+z} = 2z - 2 + \frac{2z-1}{z^2+z} = 2z - 2 + \frac{-1}{z} + \frac{3}{z+1} =$$

$$= 2(z-i) + (-2+2i) + \frac{-1}{(z-i)+i} + \frac{3}{(z-i)+(1+i)} = 2(z-i) + (-2+2i) + \frac{\frac{-1}{z-i}}{1+\frac{i}{z-i}} + \frac{\frac{3}{1+i}}{1+\frac{z-i}{1+i}} =$$

$$= 2(z-i) + (-2+2i) + \frac{-1}{z-i}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-i}{z-i}\right)^k + \frac{3}{1+i}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{z-i}{1+i}\right)^k =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-1}\big(-(-i)^{-k-1}\big)(z-i)^k\left((-2+2i) + \frac{3}{1+i}\right) + \left(2 - \frac{3}{(1+i)^2}\right)(z-i) + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot 3}{(1+i)^{k+1}}(z-i)^k.$$

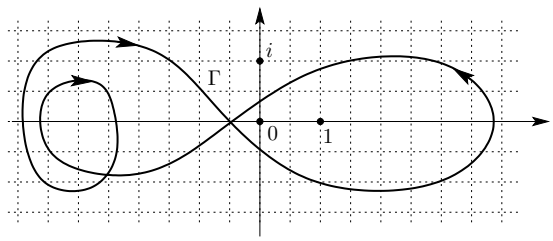
$$= \sum_{k=-\infty}^{-1}\big(-(-i)^{-k-1}\big)(z-i)^k\left((-2+2i) + \frac{3}{1+i}\right) + \left(2 - \frac{3}{(1+i)^2}\right)(z-i) + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot 3}{(1+i)^{k+1}}(z-i)^k.$$

Típushiba: A megoldásnak része az is, hogy a $2z-2$ polinomot átírjuk i körül: $2z - 2 = 2(z-i) + (-2+2i)$. Ez a lépés triviális, de enélkül nem lesz Laurent-sor az erednény... (0,9 pont)

Pontszámok: 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0,9, 0,9, 0,9, 0,9, 0,8, 0,6, 0,5, 0. Átlag: 0,86.

3.

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{\left(z - \frac{\pi}{3}\right)^2 \sin z} = ?$$



Megoldás. A Γ görbe $(+1)$-szer kerüli meg a $0, \frac{\pi}{3}, \pi$ pontokat és (-2)-ször a $-\pi$ pontot, más szingularitást nem kerül meg. A rezidummot a $0, \pm\pi$ pontokban például a $\operatorname{Res}_a \frac{f}{g} = \frac{f(a)}{g'(a)}$, a $\frac{\pi}{3}$-ban pedig a deriváltra vonatkozó Cauchy-formulából számíthatjuk ki.

$$\operatorname*{Res}_{z=k\pi} \frac{1}{\left(z-\frac{\pi}{3}\right)^2 \sin z} = \left.\frac{1}{\left(z-\frac{\pi}{3}\right)^2 (\sin z)'}\right|_{z=k\pi} = \frac{(-1)^k}{\left(k-\frac{1}{3}\right)^2 \pi^2} = \frac{(-1)^k \cdot 9}{(3k-1)^2\pi^2},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi/3} \frac{1}{\left(z-\frac{\pi}{3}\right)^2 \sin z} = \left.\left(\frac{1}{\sin z}\right)'\right|_{x=\pi/3} = \frac{-\cos\frac{\pi}{3}}{\sin^2\frac{\pi}{3}} = -\frac{2}{3},$$

$$\int_\Gamma = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_0 + \operatorname*{Res}_\pi - 2\operatorname*{Res}_{-\pi} + \operatorname*{Res}_{\pi/3}\right) = 2\pi i \left(\frac{9}{\pi^2} - \frac{9}{4\pi^2} + 2\cdot\frac{9}{16\pi^2} - \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{63}{4\pi} - \frac{4\pi}{3}\right) i.$$

Pontszámok: 1, 1, 0,95, 0,9, 0,9, 0,9, 0,9, 0,8, 0,8, 0,7, 0,7, 0,7, 0,7 0,6, 0,5, 0,2, 0, –. Átlag: 0,68.

4. Az $f(z)$ függvény holomorf az egységkör ($|z| < 1$) belsejében és $|f| < 1$. Legfeljebb mekkora lehet $|f'''(0)|$?

Megoldás. Írjuk fel a deriváltra vonatkozó Cauchy-formulát egy $r < 1$ sugarú körön, majd becsüljünk az integrandus abszolút értékével:

$$|f'''(0)| = \left|\frac{3!}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{(z-0)^4}\,\mathrm{d}z\right| \le \frac{3}{r^4\pi}\int_{|z|=r} |f(z)|\,|\,\mathrm{d}z| < \frac{3}{r^4\pi}\int_{|z|=r} 1\,|\,\mathrm{d}z| = \frac{6}{r^3}.$$

Az $r \to 1-0$ határátmenetből $|f'''(0)| \le 6$.

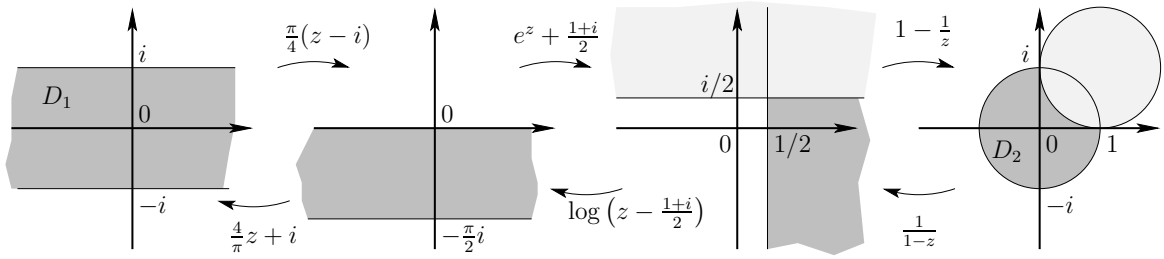
Az $f(z) = z^3$ függvényre teljesül az $|f| < 1$ feltétel, és $f'''(0) = 6$.

Az $|f'''(0)|$ legnagyobb lehetséges értéke tehát a 6.

Pontszámok: 1, 1, 1, 1, 1, 0,8, 0,6, 0,6, 0,6, 0,4, 0,4, 0,4, 0,3, 0,2, 0,2, 0,2, 0, –. Átlag: 0,54.

5. Mutass példát (képletet) konform megfeleltetésre a $D_1 = \{z : |\operatorname{Im} z| < 1\}$ és a $D_2 = \{z : |z| < 1 \text{ és } |z-1-i| > 1\}$ tartományok között.

Megoldás. Egy lehetséges megfeleltetés: $z \mapsto 1 - \dfrac{1}{e^{\frac{\pi}{4}(z-i)} + \frac{1+i}{2}}$.



Pontszámok: 1, 0,7, 0,7, 0,5, 0,3, 0,2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, –, –, –. Átlag: 0,19.

6. Az $f(z)$ egészfüggvényre $|f(1/n)| = 1/n^2$ ha $n = 1, 2, \ldots$, és $|f(i)| = 2$. Mekkora lehet $|f(-i)|$?

Megoldás. Legyen $g(z) = f(z)\cdot\overline{f(\bar{z})}$, ami szintén egészfüggvény. Az $1/n$ alakú pontokban $g(1/n) = f(1/n)\cdot\overline{f(1/n)} = |f(1/n)|^2 = (1/n)^4$. Az unicitástétel miatt tehát $g(z) = z^4$. A $z = i$ pontban $1 = |i^4| = |g(i)| = |f(i)|\cdot|f(-i)| = 2|f(-i)|$, vagyis $|f(-i)| = \frac{1}{2}$.

Megyjegyzés. A $|g(1/n)| = 1/n^2$ feltételnek az $f(z) = z^2 e^{i\varphi(z)}$, alakú függvények tesznek eleget, ahol φ olyan egész függvény, ami a valós tengelyen valós. (Házi feladat végiggondolni.)

Pontszámok: 1, 1, 0,9, 0,5, 0,5, 0,3, 0,3, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0, 0, –, –, –. Átlag: 0,25.

7. Bizonyítsd be, hogy ha az $f(z)$ egészfüggvény 2π szerint periodikus és $\lim\limits_{|y|\to\infty} f(x+yi)e^{-|y|} = 0$ egyenletesen (azaz, $\forall\varepsilon > 0\ \exists y_0 \in \mathbb{R}\ \forall x, y \in \mathbb{R}\ \left(|y| > y_0 \Rightarrow \left|f(x+yi)e^{-|y|}\right| < \varepsilon\right)$), akkor f konstans.

1. megoldás. Legyen $g(z) = f(-i\log z)$, ha $z \neq 0$. Mivel az $f(z)$ függvény periodikus 2π szerint, mindegy, hogy a logaritmusnak melyik értékét veszük. A logaritmusnak minden $z \neq 0$ pont körül van holomorf ága, ezért g is holomorf a teljes $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ halmazon. A g definícióját megfordítva, $f(z) = g(e^{iz})$.

Legyen g Laurent-sora a 0 körül $g(z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$. Azt kell igazolnunk, hogy a Laurent-sorban csak az a_0 együttható lehet 0-tól különböző. Az együtthatóformula szerint bármely $r > 0$ esetén

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} g(z)z^{-k-1}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi} g(re^{it})(re^{-it})^{-k}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi} f(t - i\log r)r^{-k}e^{-kit}\,\mathrm{d}t;$$

az $y = \log r$ helyettesítéssel

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi} f(t-iy)e^{-ky}e^{-kit}\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Ha $k \geq 1$ és $y \geq 0$, akkor (1)-ből

$$|a_k| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi} |f(t-iy)|e^{-ky}\,\mathrm{d}t \leq \max_{t\in\mathbb{R}} |f(t-iy)| \cdot e^{-ky} \leq \max_{t\in\mathbb{R}} |f(t-iy)| \cdot e^{-y}.$$

Ha y-nal ∞-hez tartunk, akkor a feladat feltétele szerint a jobboldal 0-hoz tart, tehát $a_k = 0$.

Hasonlóan, ha $k \leq -1$ és $y \leq 0$, akkor (1) szerint

$$|a_k| \leq \max_{t\in\mathbb{R}} |f(t-iy)| \cdot e^{-ky} = \max_{t\in\mathbb{R}} |f(t-iy)| \cdot e^{-|k|\cdot|y|} \leq \max_{t\in\mathbb{R}} |f(t-iy)| \cdot e^{-|y|}.$$

Ha y-nal $(-\infty)$-hez tartunk, akkor a jobboldal 0-hoz tart, tehát ilyenkor is $a_k = 0$.

2. megoldás. Ha $y \to \infty$, akkor $|\sin z| = \left|\frac{-e^{-iz}}{2i}(1-e^{2iz})\right| = \frac{e^y}{2}(1+O(e^{-2y}))$ és $|\cos z| = \left|\frac{e^{-iz}}{2}(1+e^{2iz})\right| = \frac{e^y}{2}(1+O(e^{-2y}))$; ha pedig $y \to -\infty$, akkor $|\sin z| = \left|\frac{-e^{iz}}{2i}(1-e^{-2iz})\right| = \frac{e^{|y|}}{2}(1+O(e^{-2|y|}))$ és $|\cos z| = \left|\frac{e^{iz}}{2}(1+e^{-2iz})\right| = \frac{e^{|y|}}{2}(1+O(e^{-2|y|}))$. Ha tehát $|y| \to \infty$, akkor $\frac{|\sin z|}{e^{|y|}} \to \frac{1}{2}$ és $\frac{|\cos z|}{e^{|y|}} \to \frac{1}{2}$ egyenletesen. Ezért a $\lim\limits_{|y|\to\infty} f(z)e^{-|y|} = 0$ feltétel ekvivalens azzal, hogy $|y| \to \infty$ esetén $\frac{f(z)}{\sin z} \to 0$, illetve $\frac{f(z)}{\cos z} \to 0$ egyenletesen.

Tekintsük az $g(z) = \frac{f(z)-f(-z)}{\sin z}$ függvényt. A számláló a π többszöröseiben eltűnik, ezért a g szingularitásai megszüntethetőek: a g kiegészíthető egészfüggvénnyé. A számlálóban mindkét tag 2π szerint periodikus, tehát a kiterjesztett g is periodikus 2π szerint.

Mivel $|g(z)| < \frac{|f(z)|}{|\sin z|} + \frac{|f(-z)|}{|\sin(-z)|}$ és a jobboldalon mindkét tag egyenletesen 0-hoz tart, $\lim\limits_{|y|\to\infty} g(z) = 0$ egyenletesen. Van tehát egy olyan y_0 valós szám, amire $|y| > y_0$ esetén $|g(z)| < 1$.

Az $|z| \leq y_0$ halmazon g korlátos, mert minden értékét felveszi a kompakt $|\operatorname{Re} z| \leq \pi$, $|\operatorname{Im} z| \leq y_0$ téglalapon, tehát $|g(z)| < K$ egy alkalmas K konstanssal. Ezért a g függvény a teljes síkon korlátos: $|g| \leq \max(K, 1)$ a teljes komplex síkon. A Liouville-tétel szerint ebből következik, hogy g konstans. Mivel pedig $\lim\limits_{|y|\to\infty} g(z) = 0$, ez a konstans csak a 0 lehet. Tehát $g \equiv 0$. Tehát $f(z) - f(-z)$; az f páros függvény.

Vizsgáljuk most a $h(z) = \frac{f(z)-f(\pi/2)}{\cos z}$ függvényt. Mivel f páros, $f(-\pi/2) = f(\pi/2)$. A $(k+\frac{1}{2})\pi$ alakú pontokban ezért $f(z) - f(\pi/2) = 0$. Tehát a h szinularitásai is megszüntethetőek, a h is kiegészíthető egészfüggvénnyé. A h függvény is 2π szerint periodikus és egyenletesen 0-hoz tart $|y| \to \infty$ esetén. Ezért ugyanúgy, mindt a g függvény, a h is konstans 0. Ekkor viszont $f(z) = f(\pi/2)$ minden z-re.

Pontszámok: 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, –, –, –, –, –, –, –, –, –, –, –. Átlag: 0.