Komplex függvénytan pót- és javító ZH, 2011. december 19.

Mindegyik lapra írjátok rá a neveteket.

Törekedjetek az összeszedett, világos, jól olvasható és jól érthető leírásra. Minden feladat legfeljebb 1 pontot ér, de csak arra adok pontot, amit el tudok olvasni.

Az íróeszközökön kívül más segédeszköz nem használható. (Szomszéd, mobiltelefon, számológép, szögmérő és szuahéli szótár sem.) Az előadáson és a gyakorlaton szerepelt állítások bizonyítás nélkül felhasználhatók, ha pontosan idézitek.

Értékelés: $Gy = \min\left(\max\left(\left[\frac{\max(Z_1, Z_2) + J + 1}{2}\right], M\right), 5\right)$, ahol Gy a gyakorlati jegy, Z_1, Z_2 és J a három ZH-n kapott pontszám, M a megajánlott gyakorlati jegy.

1. Legyen n egész szám. (Lehet negatív is.)

$$\int_{|z|=2} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n \mathrm{d}z = ?$$

2. Bizonyítsd be, hogy ha egy függvény az $|z| > 1$ tartományon holomorf és korlátos, akkor létezik határértéke a ∞-ben.

3.

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = ?$$

(A végeredményben ne legyenek komplex számok!)

4. Legyen F a jobb félsík. Igazold, hogy ha $f : F \to F$ holomorf, akkor

$$\left|f'(z)\right| \le \frac{\operatorname{Re} f(z)}{\operatorname{Re} z}.$$

5. Legyen $D \subset \mathbb{C}$ összefüggő nyílt halmaz, és $f : D \to \mathbb{C}$ holomorf. Bizonyítsd be, hogy ha f nem vesz fel olyan valós értéket, aminek abszolút értéke nem nagyobb 1-nél, akkor létezik olyan $g : D \to \mathbb{C}$ holomorf függvény, amire $f = \sin g$.

6. A felső félsíkot egy szabályos ötszöglemezre akarjuk képezni a Schwarz-Christoffel formulával úgy, hogy $A_1 = -1$, $A_2 = 0$, és $A_3 = 1$. Mi legyen A_4 és A_5?

7. Legyen $f(z) = \prod_{j=1}^{n} \frac{z - a_j}{1 - \overline{a_j} z}$, ahol $a_1, \ldots, a_n$ 1-nél kisebb abszolút értékű komplex számok. Bizonyítsd be, hogy f'-nek (multiplicitással számolva) pontosan $n-1$ gyöke van az egységkör belsejében.