Valós analízis gyakorlat, 2011. március 9.

1. Minden $\varepsilon > 0$-hoz mutassunk olyan δ-t, hogy ha F az I intervallum egy δ-nól finomabb felosztása és σ az f függvénynek egy F-hez tartozó integrálközelítő összege, akkor $|\sigma - \int_I f| < \varepsilon$.

(a) $I = [0,1]$, $f(x) = e^x$;

(b) $I = [0,1]$, $f(1/n) = 1$, egyébként $f(x) = 0$.

2. Igazoljuk, hogy ha $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor

$$\frac{f(\frac{1}{n}) - f(\frac{2}{n}) + f(\frac{3}{n}) - f(\frac{4}{n}) + \ldots + (-1)^{n-1} f(\frac{n}{n})}{n} \to 0.$$

3. Igazoljuk, hogy tetszőleges $c > 0$ számra

$$\frac{1^c + 2^c + \ldots + n^c}{n^{c+1}} \to \frac{1}{c+1}.$$

4. Mutassunk példát olyan integrálható $f : [0,1] \to [0,1]$ függvényre, amire $f \circ f$ nem integrálható.

5. Legyen C az olyan $[0,1]$-beli valós számok halmaza, amelyeknek van olyan harmadostört alakja, amiben nem szerepel az 1-es számjegy. (Ezt hívjuk Cantor-halmaznak.) Legyen $f(x) = 1$ ha $x \in C$ és $f(x) = 0$, ha $x \notin C$. (Ez ,,a Cantor-halmaz karakterisztikus függvénye".) Igazoljuk, hogy

(a) C kompakt, perfekt, és számossága kontinuum;

(b) Az f függvény szakadási pontjainak halmaza C;

(c) f Riemann-integrálható.

Házi feladatok

6. Minden $\varepsilon > 0$-hoz mutassunk olyan δ-t, hogy ha F az I intervallum egy δ-nál finomabb felosztása és σ az f függvénynek egy F-hez tartozó integrálközelítő összege, akkor $|\sigma - \int_I f| < \varepsilon$.

(a) $I = [0, \pi/2]$, $f(x) = \sin x$;

(b) $I = [0,1]$, $f(x) = x$, ha x racionális, és $f(x) = -x$, ha x irracionális.

7. Tegyük fel, hogy f korlátos $[0,1]$-ben, és

$$\frac{f(1/n) + f(2/n) + \ldots + f(n/n)}{n} \to A.$$

Következik-e ebből, hogy f Riemann-integrálható, és $\int_0^1 f = A$?

8. Igazoljuk, hogy ha $c > 0$, és $f : [0,1] \to [c, \infty)$ Riemann-integrálható, akkor

$$\sqrt[n]{f(1/n) \cdot f(2/n) \cdot \ldots \cdot f(n/n)} \to e^{\int_0^1 \log f}.$$

Igaz-e ugyanez $[0,1] \to (0, \infty)$ függvény esetén?

9. Igazoljuk, hogy ha egy $[0,1] \to \mathbb{R}$ függvény korlátos, és minden szakadási helye a Cantor-halmazban van, akkor Riemann-integrálható.

10. Igazoljuk, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz és $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrálható, akkor $f \circ g$ is integrálható $[a,b]$-n.

Szorgalmi feladatok

11. Konstruáljunk olyan $K \subset$ kompakt halmazt, aminek a karakterisztikus függvénye nem integrálható.

12. Igazoljuk, hogy ha egy $[a,b] \to \mathbb{R}$ függvény korlátos, és csak megszámlálható sok pontban szakad, akkor Riemann-integrálható.

13. Igazoljuk, hogy ha $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos, és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex, akkor

$$\int_0^1 f(g(x))dx \geq f\left(\int_0^1 g\right).$$

14. Az f korlátos függvénynek a $[0,1]$ intervallum minden pontjában van határértéke. (A végpontokban féloldali van.) Bizonyítsd be, hogy f integrálható.