Matematika problémamegoldó szeminárium, 2011. május 20.

1. Let $0 < a < b$. Prove that

$$\int_a^b (x^2+1)e^{-x^2}dx \geq e^{-a^2} - e^{-b^2}.$$

(IMC 2010)

2. (a) A sequence $x_1, x_2, \ldots$ of real numbers satisfies

$$x_{n+1} = x_n \cos x_n \quad \text{for all} \quad n \geq 1\,.$$

Does it follow that this sequence converges for all initial values x_1?

(b) A sequence $y_1, y_2, \ldots$ of real numbers satisfies

$$y_{n+1} = y_n \sin y_n \quad \text{for all} \quad n \geq 1\,.$$

Does it follow that this sequence converges for all initial values y_1? (IMC 2010)

3. Egy n-elemű halmaznak legfeljebb hány különböző $A_1, ..., A_t$ részhalmaza adható meg úgy, hogy bármely $1 \leq i < j < k \leq t$ esetén $(A_i \cap A_k) \subseteq A_j$ teljesüljön? (Schweitzer, 2010)

4. Compute the sum of the series

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \cdots\,.$$

(IMC 2010)

5. Let $a_0, a_1, \ldots, a_n$ be positive real numbers such that $a_{k+1} - a_k \geq 1$ for all $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Prove that

$$1 + \frac{1}{a_0}\left(1 + \frac{1}{a_1 - a_0}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{a_n - a_0}\right) \leq \left(1 + \frac{1}{a_0}\right)\left(1 + \frac{1}{a_1}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{a_n}\right).$$

(IMC 2010)

6. Legyenek a, b és n pozitív egész számok, C pedig véges számhalmaz. Tegyük fel, hogy minden pozitív egész szám felírható $ax^n + by^n + c$ alakban, ahol x és y pozitív egészek és $c \in C$. Határozzuk meg n lehetséges értékeit. (KöMaL A.528.; Kutas Péter feladata)

7. Denote by S_n the group of permutations of the sequence $(1, 2, \ldots, n)$. Suppose that G is a subgroup of S_n, such that for every $\pi \in G \setminus \{e\}$ there exists a unique $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ for which $\pi(k) = k$. (Here e is the unit element in the group S_n.) Show that this k is the same for all $\pi \in G \setminus \{e\}$.

(IMC 2010)

8. Let A be a symmetric $m \times m$ matrix over the two-element field all of whose diagonal entries are zero. Prove that for every positive integer n each column of the matrix A^n has a zero entry. (IMC 2010)

9. Határozzuk meg mindazokat a pozitív egészekből álló (a, b, c) számhármasokat, amelyekre a^2+b^2 osztható $(abc+1)$-gyel. (KöMaL A.533.)

10. Suppose that a, b, c are real numbers in the interval $[-1, 1]$ such that

$$1 + 2abc \geq a^2 + b^2 + c^2\,.$$

Prove that

$$1 + 2(abc)^n \geq a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}$$

for all positive integers n. (IMC 2010)