**Valós analízis gyakorlat, 2012. szeptember 19.**

**1.** Legyen $f : A \to B$. Igaz-e, hogy
(a) $\forall X, Y \in P(A)\ f(X) \cup f(Y) = f(X \cup Y)$ ?
(b) $\forall X, Y \in P(A)\ f(X) \cap f(Y) = f(X \cap Y)$ ?
(c) $\forall X, Y \in P(A)\ f(X) \setminus f(Y) = f(X \setminus Y)$ ?
(d) $\forall X, Y \in P(B)\ f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) = f^{-1}(X \cup Y)$ ?
(e) $\forall X, Y \in P(B)\ f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) = f^{-1}(X \cap Y)$ ?
(f) $\forall X, Y \in P(B)\ f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(Y) = f^{-1}(X \setminus Y)$ ?
Igazak-e ugyanezek injektív, illetve szürjektív függvényekre?

**2.** Igazoljuk a testaxiómák felhasználásával a következőket.
Ha $ab = 0$, akkor $a = 0$ vagy $b = 0$;
$-(-a) = a$;
$(a - b) - c = a - (b + c)$;
$-a = (-1) \cdot a$;
$(a/b) \cdot (c/d) = (a \cdot c)/(b \cdot d)$.

**3.** Vezessük le a test- és rendezési axiómákból, hogy $\forall a \in \mathbb{R}\ a^2 \geq 0$.

**4.** Mutassuk meg, hogy a komplex számok testét nem lehet rendezni úgy, hogy a rendezési axiómák teljesüljenek.

**5.** Cseréljük a rendezési axiómákat a következőkre.
10'. Minden valós szám vagy 0, vagy pozitív, vagy negatív.
11'. $x$ akkor és csak akkor pozitív, ha $-x$ negatív.
12'. Bármely két pozitív szám összege pozitív.
13'. Bármely két pozitív szám szorzata pozitív.
A $<$ relációt definiáljuk a következőképpen: $a < b$ akkor és csak akkor, ha $b - a$ pozitív.
Mutasssuk meg, hogy ezekből következnek az eredeti rendezési axiómák.

**6.** Egy valós együtthatós, racionális tört függvényt (két polinom hányadosát) nevezzünk pozitívnak, ha a számláló és a nevező főegyütthatója azonos előjelű. Ellenőrizzük, hogy ezzel a rendezéssel a racionális tört függvények rendezett testet alkotnak.

**7.** Legyen $R$ rendezett test. Az $R$ egy részhalmazát nevezzük „szépnek”, ha $0 \in H$ és $\forall x \in H\ (x+1) \in H$. Legyen $N$ az összes szép halmaz metszete.
(a) Miért értelmes ez a definíció?
(b) Igazoljuk, hogy $N$ szép halmaz.
(c) Igazoljuk, ha egy $t(x)$ tulajdonságra $t(1) \wedge \forall x \in N\ \big(t(x) \Rightarrow t(x+1)\big)$, akkor $\forall x \in N\ t(x)$.
(d) Igazoljuk, hogy $N$ minden nemüres részhalmazának van legkisebb eleme.

## Házi feladatok

**8.** Legyen $f : A \to B$, és legyenek $X_i$ $(i \in I)$ egy $B$ részhalmazaiból álló halmazrendszer. Igaz-e biztosan, hogy
(a) $f^{-1}\Big(\bigcup_{i \in I} X_i\Big) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(X_i)$? (b) $f^{-1}\Big(\bigcap_{i \in I} X_i\Big) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(X_i)$?

**9.** Igazoljuk a testaxiómák felhasználásával a következőket.
$(-a) \cdot b = -(ab)$;
$1/(a/b) = b/a$;
(a-b)+c = a-(b-c).

**10.** Vezessük le a test- és rendezési axiómákból, hogy ha $a < b < 0$, akkor $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a} < 0$.

**11.** Igazoljuk, hogy ha $*$ egy kétváltozós, asszociatív művelet, akkor az $a_1 * a_2 * \ldots * a_n$ kifejezés bármely zárójelezésének ugyanaz az eredménye.

**12.** A derékszögű koordinátarendszerben bizonyos rácspontokat megmérgeztek úgy, hogy tetszőleges $n$-re az $x + y \leq n$ tartományban legfeljebb $n$ mérgezett pont van. Egy bolha az origóból indulva ugrál, mindig vagy a $(0, 1)$, vagy az $(1, 0)$ vektorral ugrik. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan végtelen hosszú útvonal, amin elkerülheti a mérgezett pontokat.