## Valós analízis gyakorlat, 2012. szeptember 28.

**1.** Korlátosak-e alulról, illetve felülről a következő halmazok? Mi a felső, illetve alsó korlátaik halmaza? Mi a maximumuk, a minmimumuk, a szuprémumuk és az infimumuk? Melyik halmaz konvex?

$$\emptyset \qquad \{1,2,3,\dots\} \qquad \left\{\tfrac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}^+\right\} \qquad \mathbb{Q} \qquad \mathbb{R} \qquad [1,2) \qquad (2,3] \qquad [1,2)\cup(2,3]$$

**2.** Milyen $H \subset \mathbb{R}$ halmazokra igaz, hogy
(a) $\inf H < \sup H$;
(b) $\inf H = \sup H$;
(c) $\inf H > \sup H$?

**3.** Vezessük le az 1-dimenziós Helly-tételt a legkisebb felső korlát tételéből. (Segítség: vegyük az alsó végpontok halmazát.)

**4.** Igazoljuk, hogy ha egy rendezett testben igaz a teljességi axióma (a legkisebb felső korlát tétele), akkor teljesül a Cantor-axióma is.

**5.** Igazoljuk, hogy ha egy rendezett testben teljesül a teljességi axióma, akkor teljesül az arkhimédészi axióma is.

**6.** Bizonyítsuk be Borel fedési tételét: Ha $K$ korlátos, zárt intervallum, és $I_\alpha$ ($\alpha \in A$) nyílt intervallumoknak egy olyan rendszere, ami *lefedi* $K$*-t*, azaz $K \subset \bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha$, akkor van olyan véges $B \subset A$ halmaz, amire $K \subset \bigcup_{\alpha\in B} I_\alpha$. (Más szóval, $K$ minden nyílt fedéséből kiválasztható véges fedés.)

**7.** Igazoljuk, hogy ha egy rendezett testben igaz Borel fedési tétele, akkor a test izomorf a valós számok testével.

### Házi feladat

**8.** Legyen $(R, <)$ egy nemüres rendezett halmaz (egy $R$ halmaz, és rajta egy trichotóm és tranzitív kétváltozós $<$ reláció). Egy $H \subset R$ halmazt nevezzünk *nyíltnak*, ha minden $x \in H$-hoz létezik olyan $I$ nyílt intervallum, amire $x \in I \subset H$. (Az $I$ intervallum lehet végtelen is.)

Bizonyítsuk be, hogy a következő állítások ekvivalensek:

(a) $R$-ben minden felülről korlátos és nem üres halmaznak létezik legkisebb felső korlátja.

(b) $R$-ben minden alulról korlátos és nem üres halmaznak létezik legnagyobb alsó korlátja.

(c) $R$-ben igaz az 1-dimenziós Helly-tétel.

(d) $R$ minden konvex részhalmaza összefüggő.

(e) $R$ minden intervalluma összefüggő.

(f) $R$ összefüggő.

(g) $R$ minden konvex részhalmaza intervallum.

(h) $R$-ben igaz Borel fedési tétele.

Adjunk közvetlen bizonyítást az $(a) \Rightarrow (b)$, $(a) \Rightarrow (c)$, $(c) \Rightarrow (b)$, $(e) \Rightarrow (h)$ stb. implikációk közül minél többre; bármelyik állítástól bármelyik állításhoz el lehessen jutni.