Valós analízis gyakorlat, 2012. október 3.

1. Mutassunk olyan n_0 pozitív egészt, amire tetszőleges $n > n_0$ esetén

$$a)\ 10^n + 11^n + 12^n < 13^n; \qquad b)\ 1.01^n > n; \qquad c)\ \sqrt{n} + \sqrt{n+2} + \sqrt{n+4} < n^{0,51}.$$

2. Mit jelentenek ezek az állítások?

(a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ |a_n - b| < \varepsilon$
(b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \exists n \geq n_0\ |a_n - b| < \varepsilon$
(c) $\forall \varepsilon > 0\ \forall n_0\ \forall n \geq n_0\ |a_n - b| < \varepsilon$
(d) $\forall \varepsilon > 0\ \forall n_0\ \exists n \geq n_0\ |a_n - b| < \varepsilon$
(e) $\exists \varepsilon > 0\ \forall n_0\ \forall n \geq n_0\ |a_n - b| < \varepsilon$
(f) $\exists \varepsilon > 0\ \forall n_0\ \exists n \geq n_0\ |a_n - b| < \varepsilon$
(g) $\exists \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ |a_n - b| < \varepsilon$
(h) $\exists \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \exists n \geq n_0\ |a_n - b| < \varepsilon$
(i) $\exists n_0\ \forall \varepsilon > 0\ \forall n \geq n_0\ |a_n - b| < \varepsilon$
(j) $\exists n_0\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n \geq n_0\ |a_n - b| < \varepsilon$
(k) $\forall n_0\ \exists \varepsilon > 0\ \forall n \geq n_0\ |a_n - b| < \varepsilon$
(l) $\forall n_0\ \exists \varepsilon > 0\ \exists n \geq n_0\ |a_n - b| < \varepsilon$

3. Van-e az alábbi sorozatoknak véges határértéke? Ellenőrizzük a definíciót! Mutassunk $\varepsilon = 10^{-4}$-hez küszöbindexet!

$$1/\sqrt{n}; \qquad (-1)^n$$

4. Definiáljuk az $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozatot az

$$a_1 = 10; \qquad a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 1}$$

rekurzióval.

(a) Bizonyítsuk be, hogy a sorozat korlátos, és mutassunk példát alsó, illetve felső korlátra.

(b) Bizonyítsuk be, hogy $a_n \to 1$. Ellenőrizzük a definíciót, és keressünk minden $\varepsilon > 0$-hoz n_0-t.

5. Bizonyítsuk be, hogy minden konvergens sorozatnak van legkisebb vagy legnagyobb értéke.

6. Bizonyítsuk be, hogy ha $a_n \to a$, akkor $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \to a$.

7. Igazoljuk, hogy ha $a_n \to a$, akkor

$$\inf \left\{ \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} : n \in \mathbb{N} \right\} = a.$$

Házi feladat

8. Van-e az alábbi sorozatoknak véges határértéke? Ellenőrizzük a definíciót! Mutassunk $\varepsilon = 10^{-6}$-hoz küszöbindexet!

$$\frac{2n+1}{n+1}; \qquad \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$$

9. Mutassunk olyan n_0 pozitív egészt, amire tetszőleges $n > n_0$ esetén $1.0001^n > n^{100}$.

10. Igaz-e, hogy ha $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \to a$, akkor $a_n \to a$?

11. Legyen $A > 0$, $x_1 = 1$ és $x_{n+1} = \dfrac{x_n + \dfrac{A}{x_n}}{2}$. Igazoljuk, hogy $x_n \to \sqrt{A}$.