## Valós analízis gyakorlat, 2012. október 10.

**1.** Bizonyítsuk be, hogy ha $a_n \geq 0$, és $a_n \to a$, akkor $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$.

**2.**

$$\lim \sqrt[n^2]{1^2 + 2^n + 3^n + \ldots + n^n} = ? \quad \lim \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}} = ? \quad \lim \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+2)^3}}{\frac{1}{n!} - \frac{1}{\sqrt{(n^2+1)(n^4+2)}}} = ?$$

**3.** Mutass példát olyan $a_n$ és $b_n$ sorozatokra, amikre $(a_n - b_n) \to 0$, és $a_n/b_n \to \infty$.

**4.** Tegyük fel, hogy $a_n \to 1$. Mit mondhatunk az $(a_n)^n$ sorozat konvergenciájáról és határértékéről?

**5.** Bizonyítsuk be, hogy ha $a_n \to 1$, és a $(b_n)$ sorozat korlátos, akkor $a_n^{b_n} \to 1$.

**6.** Bizonyítsuk be, hogy ha $0 < A_1 < A_2$, az $(a_n)$ egy $[A_1, A_2]$-beli sorozat, továbbá $b_n \to 0$, akkor $a_n^{b_n} \to 1$.

**7.** Bizonyítsuk be, hogy ha $b_n \to B$, és $A > 0$, akkor $A^{b_n} \to A^B$.

**8.** Bizonyítsuk be a súlyozott számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$(a_1^{w_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{w_n})^{\frac{1}{w_1 + \ldots + w_n}} \leq \frac{w_1 a_1 + \ldots + w_n a_n}{w_1 + \ldots + w_n},$$

ha $a_1, \ldots, a_n, w_1, \ldots, w_n > 0$; egyenlőség akkor áll, ha $a_1 = \ldots = a_n$.

### Házi feladat

**9.** Mi az alábbi sorozatok határértéke?

$$\frac{n^2 + (n+2)^3}{n^2 - \sqrt{(n^2+1)(n^4+2)}} \qquad \frac{n^{100} 2^n + 3^n}{\left(\sqrt{4^n + 1} - 2^n + n^5\right)(5^{n+6} - 8)}$$

**10.** Igazold, hogy minden számsorozat előállítható egy 0-hoz tartó és egy végtelenhez tartó sorozat szorzataként.

**11.** Bizonyítsuk be, hogy ha $a_n \to A$, $b_n \to B$, és $A > 0$, akkor $a_n^{b_n} \to A^B$.

**12.** Mi legyen $0^0$, $\infty^0$ és $0^\infty$?