Valós analízis gyakorlat, 2012. október 17.

1. Bizonyítsuk be, hogy torlódási pontok torlódási pontja torlódási pont, avagy, ha c torlódási pontja a (b_k) számsorozatnak, és (b_n) minden eleme torlódási pontja az (a_n) sorozatnak, akkor c torlódási pontja (a_n)-nek.

2. Mik a $\left\{\sqrt{n}\right\}$ sorozat torlódási pontjai?

3. Bizonyítsuk be, hogy bármely számsorozat (véges és végtelen) torlódási értékei között van legnagyobb és legkisebb.

4. Ellenőrizzük a Cauchy-kritériumot az $(-1)^n$ és a $(-1)^n/\sqrt{n}$ sorozatokra.

5. Vezessük le a Cauchy-kritérium elégségességét az 1-dimenziós Helly-tételből.

6. Vezessük le a Bolzano-Weierstrass tételt Borel fedési tételéből.

Házi feladatok

7. Egy H halmazt nevezzünk *zárt*nak, ha a komplementere nyílt. Melyik halmaz zárt az alábbiak közül?

$$\emptyset; \qquad \mathbb{R}; \qquad (a,b); \qquad [a,b]; \qquad \mathbb{Q}; \qquad \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$$

8. Igazoljuk, hogy

a) akárhány zárt halmaz metszete is zárt;

b) véges sok zárt halmaz uniója is zárt;

c) ha $Z \subset \mathbb{R}$ zárt halmaz és $a_n \in Z$ minden n-re, akkor az (a_n) sorozat torlódási pontjai is Z-ben vannak.

9. Bizonyítsuk be, hogy bármely számsorzat torlódási pontjainak halmaza zárt.

10. Bizonyítsuk be, hogy ha egy arkhimédészien rendezett testben minden Cauchy-sorozat konvergens, akkor a testben igaz a legkisebb felső korlát tétele is.