Valós analízis gyakorlat, 2012. október 24.

1.
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots =?$$

2.
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n =?$$

3. Konvergens? Divergens?

$$\sum e^{-n^2} \qquad \sum \frac{n^{10}}{3^n-2^n} \qquad \sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \qquad \sum n^2 e^{-\sqrt{n}} \qquad \sum \left(n^{1/n^2}-1\right)$$

4. Igaz, vagy hamis?

(a) Ha $a \to 0$, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens.

(b) Ha $a \to 0$, és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ részletösszegei korlátosak, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens.

(c) Ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ összege létezik, akkor $a \to 0$.

5. Igazoljuk, hogy ha $|a_n| < \dfrac{1}{n^2}$ minden pozitív egész n-re, akkor az $\sum a_n$ sorra teljesül a Cauchy-kritérium.

6. Tegyük fel, hogy $a_n \le b_n \le c_n$ minden pozitív egész n-re. Igazoljuk, hogy ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergens, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ is konvergens.

7. Legyen $\sum\limits_{n=1}^{n} a_n$ pozitív tagú divergens sor. Igazoljuk, hogy van olyan, pozitív számokból álló, 0-hoz tartó (c_n) sorozat, amire $\sum\limits_{n=1}^{n}(c_n \cdot a_n)$ divergens.

Házi feladatok

8. Konvergens? Divergens?

$$\sum \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \qquad \sum \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} \qquad \sum \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n\log n} \qquad \sum \frac{\sqrt[n]{n}-1}{\log^2 n}$$

9.
$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}+\cdots =?$$

10.
$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 q^n =?$$

11. Legyen minden k pozitív egészre $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)}$ pozitív tagú divergens sorozat. Igazoljuk, hogy van olyan, pozitív számokból álló, 0-hoz tartó (c_n) sorozat, amire a $\sum\limits_{n=1}^{n}(c_n \cdot a_n^{(k)})$ sorok $(k = 1, 2, \dots)$ mind divergensek.