Valós analízis gyakorlat, 2012. november 23.

1. Egyenletesen folytonosak-e a következő függvények? Ellenőrizzük a definíciót, és mutassunk ε-hoz δ-t, illetve mutassunk olyan ε-t, amihez nem létezik δ.

$\sqrt{x}$ a $[0,\infty)$ intervallumon;
$1/x$ az $[1,2]$ intervallumon;
x^2 a $[0,\infty)$ intervallumon;

2. Mutassunk példákat olyan (a) zárt félegyenesen; (b) korlátos nyílt intervallumon folytonos függvényre, ami nem egyenletesen folytonos.

3. Legyen $f:[0,1)\to\mathbb{R}$ folytonos. Bizonyítsuk be, hogy f akkor és csak akkor egyenletesen folytonos, ha $\lim\limits_{1-0} f$ létezik és véges.

4. Mutasd meg, hogy Lipschitz $(0,1)\to\mathbb{R}$ függvények szorzata is Lipschitz.

5. Igazoljuk az átviteli elvvel is, hogy ha f monoton növekvő az (a,b) intervallumon, akkor $\lim\limits_{a+0} f = \inf\limits_{(a,b)} f$ és $\lim\limits_{b-0} f = \sup\limits_{(a,b)} f$.

6. Rendezzük a racionális számokat egy (q_n) sorozatba, és legyen tetszőleges k pozitív egészre

$$a_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad q_k > x; \\ 1 & \text{ha} \quad q_k = x; \\ 2 & \text{ha} \quad q_k < x. \end{cases}$$

Ezek után definiáljuk az f függvényt a következőképpen: legyen $f(x)$ tizedestört alakja $0,a_1(x)a_2(x)a_3(x)\ldots$.

Igazoljuk, hogy ez a függvény korlátos, szigorúan monoton növekvő, az irracionális számokban folytonos, a racionális számokban pedig sem jobbról, sem balról nem folytonos.

7. (a) Lehet-e elsőfajú szakadási helyek torlódási pontja elsőfajú szakadási hely?
(b) Lehet-e másodfajú szakadási helyek torlódási pontja másodfajú szakadási hely?

8. Bizonyítsuk be, hogy bármely $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény elsőfajú szakadási helyeinek halmaza megszámlálható.

9. Legyen $K\subset\mathbb{R}$. Igazoljuk, hogy ha minden folytonos $K\to\mathbb{R}$ függvény egyenletesen folytonos, akkor K korlátos és zárt.

10. Vezessük le a Heine-tételt Borel fedési tételéből.

Házi feladatok

11. Egyenletesen folytonosak-e a következő függvények? Ellenőrizzük a definíciót, és mutassunk ε-hoz δ-t, illetve mutassunk olyan ε-t, amihez nem létezik δ.

x^2 az $[-1,1]$ intervallumon;
$|x|$ a teljes $\mathbb{R}$-en;
$1/x$ a $(0,1)$ intervallumon.

12. Egy monoton $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény az értékkészlete sűrű $\mathbb{R}$-ben. Igazoljuk, hogy f mindenhol folytonos.

13. (a) Lehet-e másodfajú szakadási helyek torlódási pontja elsőfajú szakadási hely?
(b) Lehet-e elsőfajú szakadási helyek torlódási pontja másodfajú szakadási hely?

14. Mutasd meg, hogy egyenletesen folytonos $(0,1)\to\mathbb{R}$ függvények szorzata is egyenletesen folytonos.

15. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $H\subset\mathbb{R}$ megszámlálható halmazhoz létezik olyan szigorúan monoton függvény, ami pontosan H pontjaiban szakad.

16. Igaz-e, hogy ha az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényre $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x-0)\le f(x)\le f(x+0)$, akkor f monoton növekvő?