## Valós analízis gyakorlat, 2012. november 28.

**1.** Igazoljuk, hogy ha egy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény konvex, de nem szigorúan konvex, akkor van olyan nem elfajuló intervallum, ahol lineáris.

**2.** Igaz-e, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konkáv, akkor $\lim\limits_{-\infty} f < \infty$ vagy $\lim\limits_{\infty} f < \infty$?

**3.** Igaz-e, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konkáv és $\lim\limits_{-\infty} f$ véges, akkor $f$ monoton csökkenő?

**4.** Legyen $f$ valós függvény egy $I$ intervallumon. Igazoljuk, hogy $f$ akkor és csak akkor konvex, ha $I$ minden belső $a$ pontjához van olyan lineáris $\ell(x)$ függvény, amire $\ell(a) = f(a)$, és $f(x) \geq \ell(x)$ minden $x \in I$-re.

**5.** Igazoljuk, hogy ha $f$ gyengén konvex, akkor

$$f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n}.$$

**6.** Igazoljuk, hogy ha $g : A \to B$ és $f : B \to C$ konvex, továbbá $f$ nonoton nő, akkor $f \circ g$ is konvex.

**7.** Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$x = y^2 + y; \qquad y = (2^{x+1} - 5)/3.$$

(KöMaL F. 2825.)

**8.** Közvetlenül a Bernoulli-egyenlőtlenségből, a gyenge konvexitás használata nélkül vezessük le, hogy $\alpha > 1$ és $\alpha < 0$ esetén az $x^\alpha$ függvény szigorúan konvex, ha pedig $0 < \alpha < 1$, akkor a függvény szigorúan konkáv.

### Házi feladatok

**9.** Igaz-e, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex, és $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$, akkor $\lim\limits_{\infty} f = \infty$?

**10.** Igazoljuk, hogy ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvex, akkor $\lim\limits_{a+0} f$ és $\lim\limits_{b-0} f$ létezik és véges, továbbá $\lim\limits_{a+0} f \leq f(a)$ és $\lim\limits_{b-0} f \leq f(b)$.

**11.** Igazoljuk, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton növekvő és konvex, akkor $f^{-1}$ konkáv az $(\inf f, \sup f)$ intervallumon.

**12.** Igazoljuk, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív, akkor $f^2$ szigorúan gyengén konvex.

**13.** A nemnegatív $x, y$ számokra $x^3 + y^4 \leq x^2 + y^3$. Igazoljuk, hogy $x^3 + y^3 \leq 2$.

(KöMaL A. 303.)