Valós Analízis ZH, 2012. október 19.

Mindegyik lapra írjátok rá a neveteket.

Törekedjetek a világos, jól olvasható leírásra. (Csak arra adok pontot, amit el tudok olvasni.)

Minden feladat legfeljebb 1 pontot ér. Részpontszám is kapható. Az osztályzat az elért pontok száma, kerekítve.

Az íróeszközökön kívül más segédeszköz nem használható. (Szomszéd, számológép, a szomszéd számológépe, szögmérő és androidos szuahéli szótár sem.)

Az előadáson és a gyakorlaton szerepelt állítások bizonyítás nélkül felhasználhatók, ha pontosan idézitek. (Pl. „Volt előadáson, hogy...")

1. A pozitív a, b, c számokra $a^3 + b^5 + c^7 = 1$. Legfeljebb mekkora lehet abc?

2. Legyen $a_1 = 100$, és $a_{n+1} = \sqrt{(a_n - 1^2) + 10}$, ha $n \leq 1$. $\lim a_n =?$

3. Az $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ valós számok k-adik hatványközepe

$$M_k(a_1, \ldots, a_n) = \sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k}{n}}.$$

Bizonyítsd be, hogy (rögzített $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok esetén)

$$\lim_{k\to\infty} M_k(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \max(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

4.

$$\lim \left(\frac{n^2 - n}{n^2 - 3n + 2}\right)^n =?$$

5. Bizonyítsd be, hogy ha $H_1, H_2, \ldots \subset \mathbb{R}$ mindenütt sűrű nyílt halmazok, akkor $\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$ is mindenütt sűrű.

6. Igaz-e Borel fedési tétele a racionális törtfüggvények rendezett testében? Ha igaz, bizonyítsd be; ha nem igaz, mutass ellenpéldát.

7. Legyen $A^{(1)} = (a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, \ldots), A^{(2)} = (a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)}, \ldots), A^{(3)} = (a_1^{(3)}, a_2^{(3)}, a_3^{(3)}, \ldots), \ldots$ nullához tartó sorozatok egy tetszőleges sorozata. Bizonyítsd be, hogy létezik olyan, nullához tartó sorozat, aminek nagyságrendje nagyobb, mint akármelyik $A^{(k)}$ nagyságrendje.