Valós analízis ZH, 2012. december 10.

1. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos, és tegyük fel, hogy $f(2012) = 0$. Bizonyítsuk be, hogy van olyan x valós szám, amire $f(x) = x$ vagy $f(x) = -x$.

2. Legyen az $a_1, \ldots, a_n \in [0, 1]$ számok számtani közepe A. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a_1(1 - a_1) + \ldots + a_n(1 - a_n)}{n} \leq A(1 - A).$$

3. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos, és tegyük fel, hogy $\lim\limits_{x\to\infty} f > 0$ és $\lim\limits_{x\to-\infty} f > 0$. Bizonyítsuk be, hogy f értékkészletének infimuma pozitív.

4. Legyen $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{1 + x^3} - x\right) = \alpha$. Határozzuk meg α értékét, és adjunk meg minden $\varepsilon > 0$-hoz olyan K-t, hogy $x > K$ esetén $\left|\sqrt[3]{1 + x^3} - x - \alpha\right| < \varepsilon$ teljesüljön.

5. Tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény rendelkezik a következő tulajdonsággal: valahányszor $x_n \in [a, b]$, $x_n \to x$ és az $\big(f(x_n)\big)$ sorozatnak van határértéke, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \leq f(x)$. Bizonyítsuk be, hogy f-nek van legnagyobb értéke $[a, b]$-ben.

6. Az $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ függvényre teljesül, hogy $f(x) > f(y)^{1+(1/y)}$ minden $x, y > 0$-ra. Bizonyítsuk be, hogy a $\lim\limits_{x\to\infty} f$ határérték létezik.

7. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre teljesül, hogy

$$f(x) + \cos(x - y) \leq f(y) + 1$$

minden x, y-ra. Bizonyítandó, hogy f konstans.