Valós analízis gyakorlat, 2013. október 2.

1. Igazoljuk, hogy az $(x, y) \mapsto x + y$ függvény folytonos. Keressünk az $(1, 2)$ pontban $\varepsilon = 10^{-3}$-hoz δ-t.

2. Milyen valós α esetén folytonos az

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvény a $(0, 0)$ pontban?

3. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény mindegyik $f_{x=a}$ szekciófüggvénye folytonos, és mindegyik $f_{y=b}$ szekciófüggvénye monoton és folytonos. Igazoljuk, hogy f folytonos.

4. Legyen $A \subset \mathbb{R}^p$ és $f : A \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Legyen B azon $\mathbb{R}^p$-beli pontok halmaza, amelyekben az f-nek létezik véges határértéke az A halmazra szorítkozva, és legyen tetszőleges $b \in B$-re $g(b) = \lim\limits_{x \to b,\, x \in A} f(x)$. Igazoljuk, hogy g folytonos a B halmazon.

Házi feladatok

5. Igazoljuk, hogy az $(x, y) \mapsto xy$ függvény folytonos. Keressünk az $(1, 2)$ pontban $\varepsilon = 10^{-3}$-hoz δ-t.

6. Igazoljuk, hogy egy $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor folytonos, ha minden nyílt halmaz ősképe nyílt.

7. Tetszőleges $A \subset \mathbb{R}^p$ és $a \in A'$-ra és $f : A \to \mathbb{R}$ függvényre legyen

$$\operatorname*{torl}_{a,A} f = \left\{ \underline{\lim}\, f(x_n) \colon x_n \in A, x_n \neq a, x_n \to a \right\}.$$

Igazoljuk, hogy a $\operatorname*{torl}_{a,A} f$ zárt halmaz $R \cup \{\pm\infty\}$-ben, és minden nem üres, zárt halmaz előáll ilyen alakban.