Valós analízis gyakorlat, 2014. február 13.

1. Ellenőrizzük a Green-tételt a $[0,1]\times[0,1]$ négyzetre és az $f(x,y)=xy$ függvényre.

2. Legyen $P=\{(u,v)\in[0,1]^2:\ u^2+v^2\le 1\}$, $g(u,v)=(u,v,u^2+v^2)$, $F=g(P)$ és $f(x,y,z)=(x,y,z)$. Írjuk át (esetleg többszörös) Riemann-integrállá a következő felszíni/felületi integrálokat.

$$\int_F \overrightarrow{\mathrm{d}S};\quad \int_F |\,\mathrm{d}S|;\quad \int_F \left\langle f,\ \overrightarrow{\mathrm{d}S}\right\rangle;\quad \int_F f\times\ \overrightarrow{\mathrm{d}S}.$$

3. Rögzített $a\in\mathbb{R}^3$ mellett legyen $f(x)=a\times x$ $(x\in\mathbb{R}^3)$.

$$\operatorname{div} f=?\qquad \operatorname{rot} f=?$$

4. Számítsuk ki az r sugarú gömb felszínét a divergenciatételből, az $f(x,y,z)=(x,y,z)$ vektormező felületi integráljából.

5. Legyen $B=\left\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$ és $f(x,y,z)=(yz,x-z,z-y)$.

$$\int_{\partial B} f\times\ \overrightarrow{\mathrm{d}S}=?$$

6. Mi lehetne a parciális integrálás a divergenciatétellel?

Házi feladatok

7. Állapítsuk meg, hogy a $\operatorname{div},\operatorname{rot},\operatorname{grad}$ operátorok lehetséges 9 párosításából ($\operatorname{div}\operatorname{div},\operatorname{div}\operatorname{rot},\dots$) melyek alkalmazhatóak kétszer folytonosan differenciálható $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ függvényre, illetve $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ leképezésre, és közülük melyek adnak mindig nullát!

8. Rögzített $a\in\mathbb{R}^3$ mellett legyen $f(x)=x\times a$ $(x\in\mathbb{R}^3)$.

$$\operatorname{div} f=?\qquad \operatorname{rot} f=?$$

9. Legyen $B=\left\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$ és $f(x,y,z)=(yz,x-z,z-y)$.

$$\int_{\partial B} \left\langle f,\ \overrightarrow{\mathrm{d}S}\right\rangle=?$$

10. Legyen $G\subset\mathbb{R}^2$ egyszeresen összefüggő, nyílt, $g:[0,1]\to G$ egyszerű, zárt, rektifikálható, pozitív irányítású görbe, $A\subset G$ a g belseje és $f:G\to\mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható. Bizonyítsd be, hogy

$$\int_A (D_xf\times D_yf)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{f\circ g}\mathbf{x}\times\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

A következő órán, írásban beadandó házi feladat

BA1. Legyen $f_1(x,y,z)=xyz$ és $f_2(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. Konstruálj olyan $f_3:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ függvényt, amire az (f_1,f_2,f_3) vektormező felületi integrálja tetszőleges zárt gömbfelületen megegyezik a gömb térfogatával.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladat

PM1. (a) Legyen $G\subset\mathbb{R}^3$ és $\phi_t(u,v)$ egy $[0,1]^3\to G$ folytonosan differenciálható paraméteres felületsereg, ami az egységnégyzet minden rögzített (u,v) határpontjára független a t paramétertől. Legyen $F:G\to\mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható, divergenciamentes vektormező. Mutasd meg, hogy az $I(t)=\int_0^1\int_0^1\langle D_x\phi_t(x,y)\times D_y\phi_t(x,y),F(\phi_t(x,y))\rangle\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ paraméteres felületi integrál nem függ t-től.

(b) Legyen $G=\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$. Konstruálj olyan $G\to\mathbb{R}^3$ divergenciamentes vektormezőt, aminek az egységgömbön vett felületi integrálja nem 0.

(c) Igazold, hogy G nem homeomorf $\mathbb{R}^3$-nel.