

Valós analízis gyakorlat, 2014. február 20.

- (a) Milyen gyűrűt generálnak az $[a, \infty)$ alakú félegyenesek?
(b) Milyen σ -gyűrűt generálnak az $[a, \infty)$ alakú félegyenesek?
(c) Hány elem (mekkora számosságú halmaz) generálja a Borel-halmazok σ -gyűrűjét?
- (a) Igazoljuk, hogy ha egy halmaz benne van az \mathcal{A} halmazrendszer által generált gyűrűben, akkor benne van az \mathcal{A} egy alkalmas véges részrendszere által generált gyűrűben is.
(b) Igazoljuk, hogy ha egy halmaz benne van az \mathcal{A} halmazrendszer által generált σ -gyűrűben, akkor benne van az \mathcal{A} egy alkalmas megszámlálható részrendszere által generált σ -gyűrűben is.
- Igazoljuk, hogy minden nyílt halmaz F_σ , és minden zárt halmaz G_δ .
- Bizonyítsuk be, hogy bármely $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonossági pontjainak halmaza Borel, és adjunk meg minél szűkebb Borel-osztályt (pl. $G_{\delta\sigma\delta\sigma\delta\sigma}$), aminek biztosan eleme.
- Mérték-e a külső Jordan-mérték a korlátos halmazok gyűrűjén?
- Legyen \mathcal{T} az $[a, b) \times [c, d)$ alakú, félig nyílt téglalapok rendszere.
(a) Igazoljuk, hogy \mathcal{T} félgyűrű.
(b) Mi a \mathcal{T} által generált gyűrű?
(c) Igazoljuk, hogy tetszőleges $f : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor additív, ha létezik olyan $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amire $f([a, b) \times [c, d)) = g(b, d) - g(a, d) - g(b, c) + g(a, b)$.

Házi feladatok

- Legyen \mathcal{A} és \mathcal{B} σ -gyűrű. Milyen halmazokból áll az $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ által generált σ -gyűrű?
- Bizonyítsuk be, hogy az F_σ , illetve a G_δ , tulajdonságú halmazok rendszerei zártak a véges metszetre és a véges unióra.
- a) Igazoljuk, hogy megszámlálható sok sűrű G_δ halmaz metszete sűrű G_δ .
b) Igazoljuk, hogy $Q \in F_\sigma(\mathbb{R}) \setminus G_\delta(\mathbb{R})$.
- Igazoljuk, hogy $F_{\sigma\delta\sigma\delta}(\mathbb{R}^n) \subset G_{\delta\sigma\delta\sigma\delta}(\mathbb{R}^n)$.
- Lehet-e egy végtelen σ -gyűrű számossága kontinuumnál kisebb?
- Hány Borel-halmaz van \mathbb{R}^n -ben?

A következő órán, írásban beadandó házi feladat

BA2. Legyen $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos minden n -re. Bizonyítsd be, hogy az $\{x : f_n(x) \text{ konvergens}\}$ halmaz Borel, és adj meg minél szűkebb Borel-osztályt, aminek biztosan eleme.