Valós analízis gyakorlat, 2014. február 27.

1. (a) Igazoljuk, hogy ha egy $\mathbb{R}$-beli nyílt halmaz nullmértékű, akkor üres.
(b) Mutassunk példát olyan $\mathbb{R}$-beli zárt halmazra, ami nullmértékű, de nem üres.
(c) Mutassunk példát olyan $\mathbb{R}$-beli halmazra, ami nullmértékű, de sem nem üres, se nem zárt.

2. Tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra adjunk meg olyan sűrű nyílt $G \subset \mathbb{R}$ halmazt, amire $\overline{\lambda}(G) < \varepsilon$.

3. Igaz-e, hogy ha egy $\mathbb{R}$-beli halmaz (a) minden Borel-halmazt; (b) minden G_δ halmazt; (c) minden F_σ halmazt; (d) minden nyílt halmazt; (e) minden zárt halmazt; (f) minden intervallumot; (g) minden egységnyi hosszúságú intervallumot jól vág ketté a külső Lebesgue-mérték szerint, akkor Lebesgue-mérhető?

4. Legyen X nem megszámlálható halmaz, $\mathcal{M}$ pedig az X egyelemű részhalmazai által generált σ-algebra.
a) Jellemezzük $\mathcal{M}$ elemeit!
b) Konstruáljunk olyan α valószínűségi mértéket $\mathcal{M}$-en, mely szerint az egyelemű halmazok nullmértékűek!
c) Határozzuk meg az α által generált ϕ_α külső mértéket!
d) Mi a ϕ_α által meghatározott mérték és mely halmazok mérhetőek?

5. Konstruálj olyan $H \subset \mathbb{R}$ Borel-halmazt, amelyre tetszőleges $a < b$ esetén $\lambda((a,b) \cap H) > 0$ és $\lambda((a,b) \setminus H) > 0$.

6. Megadható-e megszámlálhatónál több 1/2 Lebesgue mértékű mérhető halmaz $[0,1]$-ben úgy, hogy közülük bármely kettő metszetének mértéke 1/4 legyen?

7. Igaz-e, hogy minden Lebesgue-nullmértékű valós számhalmaz előáll, mint megszámlálható sok Jordan-nullmértékű halmaz uniója?

Házi feladatok

8. (a) Igazoljuk, hogy ha egy $\mathbb{R}$-beli zárt halmaz nullmértékű, akkor sehol sem sűrű.
(b) Igaz-e, hogy ha egy halmaz sehol sem sűrű, akkor nullmértékű?

9. Tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra adjunk meg olyan nyílt $G \subset \mathbb{R}$ halmazt, amire $G \supset \mathbb{Q}$ és $\overline{\lambda}(G) < \varepsilon$.

10. Igaz-e, hogy ha egy $\mathbb{R}$-beli halmaz (a) minden Borel-halmazt; (b) minden G_δ halmazt; (c) minden F_σ halmazt; (d) minden nyílt halmazt; (e) minden zárt halmazt; (f) minden intervallumot; (g) minden egységnyi hosszúságú intervallumot jól vág ketté a külső Lebesgue-mérték szerint, akkor Lebesgue-mérhető?

11. Legyen μ eltolás-invariáns mérték $\mathbb{R}$ Borel-halmazain, amire $\mu\big([0,1]\big) < \infty$. Igazoljuk, hogy μ a Lebesgue-mérték konstansszorosa.

12 (Borel-Cantelli lemma). Legyen $\overline{\mu}$ külső mérték az X halmazon, és $A_n \subset X$ $(n = 1, 2, \ldots)$ olyan halmazok, amikre $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_n)$ véges. Bizonyítsuk be, hogy az olyan X-beli pontok halmaza, amelyek végtelen sok A_n-nek elemei, μ-nullmértékű.

A következő órán, írásban beadandó házi feladat

BA3. Igazoljuk, hogy ha $H \subset \mathbb{R}$ olyan halmaz, amelyre bármely $a < b$ esetén $\overline{\lambda}((a,b) \cap H) < \dfrac{99}{100}(b-a)$, akkor H nullmértékű.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladat

PM2. Igazoljuk, hogy ha egy $\mathbb{R}^n$-beli halmaz előáll nem üres belsejű konvex halmazok uniójaként, akkor Lebesgue-mérhető.