Valós analízis gyakorlat, 2014. március 6.

1. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Melyikből következik melyik?
(i) f m.m. $x \in [a, b]$ -ben folytonos.
(ii) Van olyan folytonos függvény, amellyel f m.m. x-ben megegyezik.
(iii) Van olyan nullmértékű H halmaz, hogy $[a, b] \setminus H$-ra megszorítva f folytonos.
(iv) f Riemann integrálható $[a, b]$-n.

2. (a) Igazoljuk, hogy ha μ mérték egy σ-gyűrűn, akkor a σ-véges halmazok σ-gyűrűt alkotnak.
(b) Milyen σ-algebrát generálnak a σ-véges halmazok?

3. Legyen $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ 1 & \text{ha } x \geq 0, \end{cases}$, $g(x) = \lfloor x \rfloor$ és $h(x) = \lceil x \rceil$. Határozzuk meg a $\overline{\mu}_f$, $\overline{\mu}_g$, $\overline{\mu}_h$ Lebesgue-Stieltjes külső mértékeket, a mérhető halmazok rendszereit.

4. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növő függvény, és μ_f az f által generált Lebesgue-Stieltjes mérték. Igazold, hogy tetszőleges Borel-mérhető H halmazhoz léteznek olyan F_σ $B \subset H$ és G_δ $K \supset H$ halmazok, amikre $\mu_f(B) = \mu_f(K) = \mu_f(H)$.

5. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növő függvény, és μ_f az f által generált Lebesgue-Stieltjes mérték. Igazold, hogy tetszőleges Borel-mérhető H halmazhoz léteznek olyan F_σ $B \subset H$ és G_δ $K \supset H$ halmazok, amikre $\mu_f(B) = \mu_f(K) = \mu_f(H)$.

Házi feladatok

6. Legyen $\sum a_n$ abszolút konvergens sor, (q_n) a racionális számok egy felsorolása, és tetszőleges $X \in P(\mathbb{R})$-re $\mu(X) = \sum_{q_n \in X} a_n$. Mi a μ függvény Jordan-felbontása? Mi a totális variációja?

7. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ rögzített függvény, és legyen $m([c, d)) = f(d) - f(c)$ minden $a \leq c < d \leq d$ esetén. Legyen μ az m halmazfüggvény (egyértelmű) kiterjesztése a $[c, d)$ intervallumok által generált gyűrűre, továbbá legyen π, ν és τ a μ halmazfüggvény pozitív, negatív, illetve totális variációja. Bizonyítsuk be, hogy
(a) Minden $a \leq b < c \leq d$-re $\tau\big([c, d)\big) = V\big(f; [c, d]\big)$;
(b) $f(x) - f(a) = \mu([a, x)) = \pi([a, x)) - \nu([a, x))$ minden olyan $x \in [a, b]$-re, amelyre a jobboldal értelmes.

A következő órán, írásban beadandó házi feladat

BA4. Legyen $\mu = \lambda - \mu_{[x]}$. Mik a mérhető halmazok? Mik a mérték variációi? Mi a mérték Jordan-felbontása, és mi a Hahn-felbontása?