

Valós analízis gyakorlat, 2014. március 13.

1. Bizonyítsd be, hogy minden monoton $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény Borel-mérhető.
2. Bizonyítsd be, hogy Borel-mérhető függvények kompozíciója Borel-mérhető.
3. Igazoljuk, hogy ha $f > 0$ a μ -mérhető, pozitív mértékű A -n, akkor $\int_A f d\mu > 0$.
4. Átírhatjuk-e az integrál definícióját felső összegekre?
5. Hogyan alkalmazhatjuk a monoton konvergencia tételt a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$$

határérték meghatározására?

6. Igaz-e, hogy ha $f_1 \geq f_2 \geq \dots$ nemnegatív, Lebesgue-mérhető függvények, akkor

$$\lim \int f_n d\lambda = \int (\lim f_n) d\lambda?$$

7. Bizonyítsuk be Luzin tételét: Ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető, akkor minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan ε -nál kisebb mértékű D halmaz, hogy f folytonos $[a, b] \setminus D$ -n.
8. Legyen (A, \mathcal{M}, μ) valószínűségi mértéktér, és nevezzük valószínűségi változónak a μ -mérhető $\xi : A \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket.
 - (a) $E(\xi) = ?$
 - (b) $D^2(\xi) = ?$
 - (c) Legyen F a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, és legyen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Borel-mérhető. Milyen integrál adja meg $E(g(\xi))$ -et?
9. Bizonyítsd be, hogy minden Riemann-integrálható $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény Lebesgue-mérhető.

Házi feladatok

10. Bizonyítsd be, hogy minden folytonos $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény Lebesgue-mérhető.
11. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Borel-mérhető, és $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető valamely (M, μ) mértéktéren. Bizonyítsd be, hogy az $f \circ g$ függvény μ -mérhető.
12. Egy ξ valószínűségi változó „eloszlása” a $\mu_\xi(H) = P(\xi \in H)$ valószínűségi Borel-mérték. Milyen integrál írja le a várható értéket és a szórásnégyzetet?
13. Igazold a Borel-Cantelli lemma segítségével, hogy ha f_n nemnegatív és μ -mérhető a μ -mérhető A -n és $\int_A f_n d\mu < 1/n^2$, akkor $f_n \rightarrow 0$ μ -m.m.
14. Mutass példát olyan korlátos, Lebesgue-integrálható $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre, ami nem Riemann-integrálható.
15. Konstruálj olyan mérhető $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, ami semmilyen teljes mértékű halmazra megszorítva sem folytonos.

A következő órán, írásban beadandó házi feladat

BA5. Fogalmazd át a monoton konvergencia tételt és a Beppo Levi tételt számsorokra.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladat

PM4. Igaz-e, hogy bármely korlátos, Lebesgue-integrálható $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényhez létezik olyan $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény, amire $f = g$ m.m.?