Valós analízis gyakorlat, 2014. március 20.

1. Igazold a Beppo Levi tétel segítségével, hogy ha f_n nemnegatív és μ-mérhető a μ-mérhető A-n és $\int_A f_n d\mu < 1/n^2$, akkor $f_n \to 0$ μ-m.m.

2. Kicserélhetjük-e a Fatou-lemmában a liminf-et limsup-ra?

3. Vezessük le be a Fatou-lemmából a monoton konvergencia tételt.

4. Adott mérhető $f : X \to \mathbb{R}$ függvényre melyikből következik a másik?
(i) f integrálható X-en,
(ii) $|f|$ integrálható X-en.

5. Fogalmazzuk át a kis Lebesgue-tételt véges összegekre.

6. Mutassunk példát olyan, pontonként konvergens $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ függvénysorozatra, amire $\lim \int_0^1 f_n$ létezik, de $\lim \int_0^1 f_n \neq \int_0^1 \lim f_n$.

7. Legyen $A \subset \mathbb{R}$ (a) korlátos intervallum; (b) véges sok korlátos intervallum uniója; (c) véges mértékű Lebesgue-mérhető halmaz. Igazoljuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \sin(nx)d\lambda = 0.$$

8. Igazoljuk a Fatou-Lebesgue tételt: ha az (X, μ) mértéktéren $f_1, f_2, \ldots$ és g mérhető, $|f_n| \leq g$ minden n-re, és g integrálható, akkor

$$\int_X (\liminf f_n)\mathrm{d}\mu \leq \liminf \int_X f_n \mathrm{d}\mu \leq \limsup \int_X f_n \mathrm{d}\mu \leq \int_X (\limsup f_n)\mathrm{d}\mu.$$

Házi feladatok

9. Igaz-e, hogy ha f_n nemnegatív és μ-mérhető a μ-mérhető A-n és $\int_A f_n d\mu < 1/n$, akkor $f_n \to 0$ μ-m.m.?

10. Fogalmazd át a nagy Lebesgue-tételt számsorok sorozataira.

11. Vezesd le a nagy Lebesgue-tételből a korábbi, az integrál és a pontonkénti határérték felcserélhetőségéről szóló tételeket (monoton konvergencia, Beppo Levi, Fatou-lemma, Fatou-Lebesgue tétel, kis Lebesgue-tétel).

12. Igaz-e, hogy minden Riemann-integrálható $[a, b] \to \mathbb{R}$ függvény Borel-mérhető?

A következő órán, írásban beadandó házi feladat

BA6. (a) Igazold, hogy ha az (X, μ) mértéktéren $f_1, f_2, \ldots$ és $g_1, g_2, \ldots$ nemnegatív mérhető függvények, akkor

$$\liminf \int_X (f_n + g_n)\mathrm{d}\mu \leq \liminf \int_X f_n \mathrm{d}\mu + \limsup \int_X g_n \mathrm{d}\mu \leq \limsup \int_X (f_n + g_n)\mathrm{d}\mu.$$

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladat

PM6. Bizonyítsd be Lebesgue integrál nélkül, hogy ha $f_n : [0, 1] \to [0, 1]$ folytonos és $f_n(x) \to 0$ minden $x \in [0, 1]$-re, akkor $\int_0^1 f_n(x)dx \to 0$.

PM7. Igaz-e, hogy Lebesgue-mérhető $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények tetszőleges sorozatából kiválasztható olyan részsorozat, aminek m.m. pontban van határértéke?