Valós analízis gyakorlat, 2014. április 3.

1. Mi a Lebesgue-mérték Radon-Nikodym deriváltja?

2. Legyen $f : C \to [0,1]$ a Cantor-függvény. Tetszőleges $H \subset [0,1]$ Borel-halmazra legyen $\mu_1(H) = \lambda(f(H \cap C))$, $\mu_2(H) = \lambda(f^{-1}(H))$ és $\mu_3 = \mu_1 + \mu_2$. A μ_1, μ_2, μ_3 és λ mértékek közül melyik melyikkel szinguláris, illetve melyik melyikre nézve abszolút folytonos? Mi a μ_i függvényeknek a Lebesgue-mértékre vonatkozó Lebesgue-felbontása? Mi a Lebesgue-mérték μ_i-re vonatkozó Lebesgue-felbontása?

3. Mutassunk példát folytonos szinguláris Borel-mértékre.

4. Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz, és $\forall x, y\ |f(x) - f(y)| \le K|x - y|$.
(a) Igazoljuk, hogy f valamilyen mérhető g függvény (Lebesgue-)integrálfüggvénye.
(b) Mutassuk meg, hogy $|g| \le K$ m.m.

5. Igaz-e, hogy ha f abszolút folytonos, és szigorúan monoton növő $[a,b]$-n, akkor az inverze is abszolút folytonos?

6. Konstruáljunk szigorúan növekvő, szinguláris függvényt $[0,1]$-en.

7. Létezik-e $[0,1]$-en megszámlálhatónál több, páronként szinguláris folytonos Borel-mérték?

Házi feladatok

8. Legyenek A és B mérhető halmazok az $(X, \mathcal{M}, \mu)$ véges mértéktérben és legyen

$$\vartheta(H) = \mu(H \cap A) - \mu(H \cap B)$$

minden $H \in \mathcal{M}$-re. Bizonyítsuk be, hogy $\vartheta \ll \mu$, és határozzuk meg a Radon-Nikodym deriváltját!

9. (a) Mi a kapcsolat az eloszlásfüggvény és a sűrűségfüggvény között?
(b) Igazoljuk, hogy egy valószínűségi változónak akkor és csak akkor van sűrűségfüggvénye, ha az eloszlásfüggvénye abszolút folytonos.
(A ξ valószínűségi változónak az f sűrűségfüggvénye, ha tetszőleges H Borel-halmazra $P(\xi \in H) = \int_H f\,d\lambda$.)

10. Egészítsük ki úgy, hogy igaz legyen: ha $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ konvex, és ...., akkor f abszolút folytonos.

11. Konstruáljunk olyan $f : [0,1] \to [0,1]$ folytonos függvényt, amely nem abszolút folytonos, de előáll két abszolút folytonos függvény kompozíciójaként.

A következő órán, írásban beadandó házi feladat

BA7. Bizonyítsd be, hogy ha f és g abszolút folytonosak $[a,b]$-n, akkor $f \cdot g$ is abszolút folytonos $[a,b]$-n.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladat

PM8. Az $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvényre $|f(x) - f(y)| \le |x - y|$ tetszőleges $x, y \in [0,1]$ esetén. Igazold, hogy bármely $\varepsilon > 0$-ra f grafikonja lefedhető megszámlálható sok (nem feltétlenül tengelypárhuzamos) téglalappal úgy, hogy a téglalapok rövidebbik oldalainak összege kisebb, mint ε.
(A 2010-es ostravai verseny feladata volt)