Valós analízis gyakorlat, 2014. április 10.

1. Igaz-e, hogy minden differenciálható $[-1,1] \to \mathbb{R}$ függvény abszolút folytonos?

2. Igazoljuk, hogy minden korlátos változású $[a.b] \to \mathbb{R}$ függvény majdnem egyértelműen előállítható egy abszolút folytonos és egy szinguláris függvény össdzegeként.

3. Igazoljuk, hogy ha a sűrűségi pont definíciójában a gömböt kockára cseréljük, akkor ekvivalens definíciót kapunk.

4. a) Igazoljuk, hogy ha $H \subset \mathbb{R}^p$ mérhető, $\lambda(H) > 0$, akkor $H - H$ tartalmaz 0 körüli gömböt. (Steinhaus tétele)

b) Igazoljuk, hogy ha $A, B \subset \mathbb{R}^p$ mérhető pozitív mértékű halmazok, akkor $A+B$ belseje nemüres.

(c) Igazoljuk, hogy ha $A \subset \mathbb{R}^p$ pozitív mértékű mérhető és $B \subset \mathbb{R}^p$ pozitív külső mértékű halmaz, akkor $A + B$ belseje nemüres.

5. Mik a szinuszfüggvény Lebesgue-pontjai? Mik általában egy folytonos függvény Lebesgue-pontjai?

6. Határozzuk meg a Cantor halmaz karakterisztikus függvényének Lebesgue pontjait.

Házi feladatok

7. Egészítsük ki úgy, hogy igaz legyen: ha egy .... függvény bal felső deriváltja m.m. nemnegatív, akkor monoton nő.

8. Legyen $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mérhető, és $\overline{d}_A(x)$ az A halmaz Lebesgue-mérték szerinti felső sűrűsége az x pontban. $\int_{\mathbb{R}^n} \overline{d}_A \, \mathrm{d}\lambda =?$

9. Melyik nagyobb? Egy $\mathbb{R}^n$-beli halmaz tetszőleges pontjában a halmaz Lebesgue-mérték szerinti felső belső sűrűsége, vagy a Lebesgue-mérték szerinti alsó külső sűrűsége?

10. (a) Egy $\mathbb{R}^n$-beli halmaznak minden pontjában pozitív az alsó belső sűrűsége. Igazoljuk, hogy a halmaz Lebesgue-mérhető.

(b) Igazoljuk ennek felhasználásával, hogy (nem elfajuló) zárt gömbök uniója Lebesgue-mérhető.

A következő órán, írásban beadandó házi feladat

BA8. Ellenőrizzük, hogy az $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ függvénynek van primitív függvénye, de az $x = 0$ nem Lebesgue-pontja.