Valós analízis gyakorlat, 2014. április 24.

1. Legyen $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$. Ellenőrizzük, hogy $\int_0^1 \left(\int_0^1 f\,dx\right) dy \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 f\,dy\right) dx$. Azt is ellenőrizzük, hogy f nem Lebesgue-integrálható a $[0,1]^2$ négyzeten.

2. Tegyük fel, hogy igaz a kontinuumhipotézis, és $\prec$ a $[0,1]$ intervallum egy ω_1 típusú jólrendezése. Legyen

$$A = \{(x,y) \in [0,1]^2 : x \prec y\}.$$

(a) Igazoljuk, hogy A-nak minden vízszintes szekciója nullmértékű.
(b) Igazoljuk, hogy A-nak minden függőleges szekciója teljes mértékű.
(c) Igazoljuk, hogy A nem mérhető a kétdimenziós Lebesgue-mérték szerint.

3. Legyen $(X, \mathcal{M}, \mu)$ és $(Y, \mathbb{N}, \nu)$ két mértéktér. Tegyük fel, hogy a $H \subset X \times Y$ halmaz benne van az $\mathcal{M}(\times)\mathbb{N} = \{A \times B : A \in \mathcal{M}, B \in N\}$ félgyűrű által generált σ-algebrában. Igazoljuk, hogy H minden víszintes szelete benne van $\mathcal{M}$-ben, és minden függőleges szelete benne van $\mathbb{N}$-ben.

4. Legyen $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \to \mathbb{R}$ és $g : (Y, \mathbb{N}, \nu) \to \mathbb{R}$ iontegrálható. Igazoljuk, hogy az $h(x,y) = f(x)g(y)$ függvény integrálható $X \times Y$-on, és $\int_X f \mathrm{d}\mu \cdot \int_Y f \mathrm{d}\nu$.

5. Mi parciális integrálás megfelelője Radon-Nikodym deriváltakkal?

6. Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be a paraméteres integrálokról tanult tételeket mérték szerinti integrálokkal.

Házi feladatok

7. Legyen $g(x,y) = \dfrac{x-y}{(x+y)^3}$. Ellenőrizzük, hogy $\int_0^1 \left(\int_0^1 g\,dx\right) dy \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 g\,dy\right) dx$. Azt is ellenőrizzük, hogy g nem Lebesgue-integrálható a $[0,1]^2$ négyzeten.

8. Ismert, hogy a kontinuum kofinalitása nem lehet ω. Legyen $\prec$ a $[0,1]$ intervallum egy kontinuum típusú jólrendezése. Legyen minden $H \subset [0,1]$-re $\mu(H) = 0$, ha $|H| < 2^{\aleph_0}$ (azaz H kicsi), és $\mu(H) = 1$, ha $\big|[0,1] \setminus H\big| < 2^{\aleph_0}$ (azaz H nagyon nagy).
(a) Igazoljuk, hogy μ mérték.
(b) Igazoljuk, hogy az $A = \{(x,y) \in [0,1]^2 : x \prec y\}$ halmaz nem mérhető a μ^2 kétdimenziós mérték szerint.

9. Mi parciális integrálás megfelelője Lebesgue-Stieltjes integrálokkal? Mondjuk ki és bizonyítsuk be.