Valós analízis gyakorlat, 2014. május 6.

1. Bizonyítsuk be a Hölder-egyenlőtlenséget a $p = 1$, $q = \infty$ határesetben.

2. (a) Legyen (X, μ) véges mértéktér, $1 < p < q < r < \infty$, és legyen S az összes, mérhető $[0, 1] \to \mathbb{R}$ függvényekből álló függvénysorozatok halmaza. Ábrázoljuk Venn-diagramon az L_1-ben, L_p-ben, L_q-ben, L_r-ben, L_∞-ben, és m.m. pontonként konvergens sorozatok halmazait.

(b) Ugyanez, de most legyen $\mu(X) = \infty$.

3. (a) Legyen $a \in [0, 1]$, és legyen $\phi_a : C([0, 1]) \to \mathbb{R}$, $\phi_a(f) = f(a)$. Korlátos-e ez a lineáris funkcionál?

(b) Korlátos-e ez a lineáris funkcionál, ha az L_1 normát használjuk?

(c) Vehetjük-e $C([0, 1])$ helyett $L_1([0, 1])$-t?

4. (a) Milyen $0 < p \leq \infty$ esetén igaz, hogy $C([0, 1])$ sűrű altere $L_p([0, 1])$-nek?

(b) Milyen $0 < p \leq \infty$ esetén igaz, hogy a kompakt tartójú folytonos függvények $L_p(\mathbb{R}^n)$-nek sűrű alterét alkotják?

(c) Milyen $0 < p \leq \infty$ esetén igaz, hogy a polinomok $L_p([a, b])$-nek sűrű alterét alkotják?

5. Tegyük fel, hogy $f_1, f_2, \ldots \in L_2(\mathbb{R}^n)$ páronként ortogonálisak, és $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ||f_k||_2^2$ véges.

(a) Igazoljuk, hogy a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ függvénysor konvergens $L_2(\mathbb{R}^n)$-ben.

(b) Következik-e a fentiekkől, hogy a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ függvénysor m.m. konvergens?

Házi feladatok

6. Igazoljuk, hogy ha M mértéktér és $0 < p < q < r \leq \infty$, akkor $L_p(M) \cap L_r(M)$ sűrű altere $L_q(M)$-nak.

7. (a) Igazoljuk, hogy a konstans 1, a $\sin kx$ és $\cos nx$ függvények ($k = 1, 2, \ldots$, $n = 0, 1, 2, \ldots$) páronként ortogonálisak $L_2([0, 2\pi])$-ben.

(b) Igazoljuk, hogy ha egy $f \in L_2([0, 2\pi])$ függvény ortogonális $\sin kx$ és $\cos nx$ mindegyikére, akkor $f = 0$.

(c) Igazoljuk, hogy $L_2([0, 2\pi])$ izomorf ℓ_2-vel.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladat

PM9. Igazoljuk, hogy a Baire-kategóratétel minden Banach-térben igaz.