Matematikus KFT, 3. gyakorlat, 2015. október 1.

1.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3}\cos z\,\mathrm{d}z=? \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3}\frac{\cos z}{z-\frac{\pi}{4}}\,\mathrm{d}z=? \qquad \int_{|z|=3}\frac{e^z}{z^2-4}\,\mathrm{d}z=?$$

$$\int_{|z|=3}\frac{e^z}{(z-2)^3}\,\mathrm{d}z=? \qquad \int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z-9z^3}=? \qquad \int_{|z|=3}\frac{\sin z}{z^2-\frac{\pi^2}{4}}\,\mathrm{d}z=?$$

2. Az $f(z)$ függvény holomorf az egységkör ($|z|<1$) belsejében, és $|f|<1$. Legfeljebb mekkora lehet $|f'''(0)|$?

3. Legyen a komplex szám. Alakítsuk át egy holomorf függvény komplex vonalintegráljává az $\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}\left|z-a\right|^2|\,\mathrm{d}z|$ integrált, majd számítsuk ki.

4. A $p(z)$ legalább másodfokú polinom gyökei az $|z|<\varrho$ kör belsejébe esnek. Legyen tetszőleges $R>|\varrho|$ esetén

$$I(R)=\int_{|z|=R}\frac{\mathrm{d}z}{p(z)}.$$

Igazoljuk, hogy (a) $\left|I(R)\right|\le O(1/R)$; (b) $I(R)$ értéke állandó; (c) $I(R)=0$.

Házi feladatok

5. Legyen a és r is pozitív valós szám.

$$\int\limits_{|z|=r}a^z\,\mathrm{d}z=? \qquad \int\limits_{|z|=r}\frac{a^z}{z+1}\,\mathrm{d}z=? \qquad \int\limits_{|z|=r}\frac{a^z}{(z+2)^2}\,\mathrm{d}z=? \qquad \int_{|z|=2}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n\mathrm{d}z=? \quad (n\in\mathbb{Z})$$

6. $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}|z-a|^4\,|\,\mathrm{d}z|=?$

7. Az $f(z)$ függvény holomorf a $0<|z|<1$ halmazon, és $|f(z)|<\frac{1}{\sqrt{|z|}}$. Mutassuk meg, hogy f-nek van primitív függvénye.

8. A $p(z)$ polinom gyökei közül k darab az $|z|<r$ kör belsejébe esik, a többi gyök a körön kívül van. Legyen $\gamma(t)=p(re^{it})$ $(0\le t\le 2\pi)$.

(a) Hogyan számíthatjuk ki az $\int_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{z}$ integrált helyettesítéses integrálással?

(b) Mi a γ görbe 0-ra vonatkozó indexe? (Segítség: bontsuk parciális törtekre az $p'(z)/p(z)$ függvényt.)

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladat

PM4. Legyen a komplex szám.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}\log|z-a|\,|\,\mathrm{d}z|=?$$

PM5. Legyen f olyan polinom, amire igaz az, hogy f' gyökei az egységkör belsejében vannak. Bizonyítsuk be, hogy az egységkörvonal f szerinti képe mindig balfelé kanyarodik, azaz bármely valós t-re $\left(\arg\left(\left(f(e^{it})\right)'\right)\right)'>0$.

($\left(f(e^{it})\right)'$ a sebességvektor; $\arg\left(\left(f(e^{it})\right)'\right)$ az irány; $\left(\arg\left(\left(f(e^{it})\right)'\right)\right)'$ az előjeles görbület.)